ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

ЕЩЕ РАЗ О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

САРКИСЯН В.С.

[illegible]

Sarkisian V.S. Again on solution of one integro-differential singular equations system with Cauchy kernel

[illegible]

Предлагается метод решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений, встречающейся в приложениях (задачах математической физики, гидромеханики, теории теплопроводности).

В теории упругости [1,2], гидромеханики, в теории теплопроводности и в некоторых задачах математической физики можно встретить следующую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x}+c_1\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)\,dt}{t-x}+c_2\pi\varphi'(x)+c_3\pi\psi'(x)=\lambda\varphi(x)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x}+c_4\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)\,dt}{t-x}+c_5\pi\varphi'(x)+c_6\pi\psi'(x)=0 \qquad (1.1)$$

$$|x|<1$$

где c_i $(i=1,\dots,6)$ и λ некоторые постоянные.

Рассмотрим систему (1) при граничных условиях (1.2)

$$\varphi(-1)=0,\quad \psi(1)=\xi,\quad \int_{-1}^{1}\varphi'(t)\,dt=0 \tag{2}$$

В монографиях [1,2] решение системы (1) при (2) сведено к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Однако вопрос о регулярности или квазирегулярности недостаточно исследован. Идея к понижению системы (1)-(2) возникла в нашей частной беседе с Э.Х. Григоряном при обсуждении решения этой системы, за что приношу ему свою благодарность.

Следуя Л.Галину [3], умножим второе уравнение системы (1) на N и сложив с первым, получим

$$(1+N)\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x}+(c_1+Nc_4)\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)\,dt}{t-x}$$

$$+(c_2+Nc_3)\pi\varphi'(x)+(c_5+Nc_6)\pi\psi'(x)=\lambda\varphi(x) \tag{3}$$

$$(|x|<1)$$

Далее требуется, чтобы имело место равенство

$$\frac{1+N}{c_1+Nc_4}=\frac{c_2+Nc_3}{c_5+Nc_6}=\frac{1}{S}$$

для определения N получим уравнение

$$(c_6-c_4c_3)N^2+(c_6+c_5-c_1c_3-c_2c_4)N+c_5-c_1c_2=0 \tag{4}$$

Корни этого уравнения обозначим через $N_1=N,\ N_2=\bar N$. Далее, если для первого из значений корней примем

$$1+N=K,\quad c_1+Nc_4=KS,\quad c_2+Nc_3=Q,\quad c_5+Nc_6=QS$$

тогда вместо (3) будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\frac{T(t)\,dt}{t-x}+\frac{\pi Q}{K}T(x)=\frac{\lambda}{K(S-\bar S)}\int_{-1}^{x}[T(t)-\bar T(t)]\,dt \tag{5}$$

Здесь приняты обозначения

$$T(x)=\varphi'(x)+S\psi'(x),\qquad \bar T(x)=\varphi'(x)+\bar S\psi'(x)$$

В случае $N_3 = \bar N$, получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{\bar T(t)\,dt}{t-x} + \frac{\pi\bar Q}{\bar K}\bar T(x) = \frac{1}{\bar K(S-\bar S)}\int_{-1}^{1}[T(t)-\bar T(t)]\,dt \qquad (6)$$

Таким образом, система (1) сводится к совместному решению сингулярных интегральных уравнений (5) и (6).

Следуя работам [1,2,4], решение системы сингулярных уравнений (5) и (6) ищем в виде

$$T(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} X_n n^{-\varepsilon}\tilde P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$+ (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}X_0 \qquad (7)$$

$$\bar T(x) = (1-x)^{\bar\alpha}(1+x)^{\bar\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\bar X_n n^{-\varepsilon}\tilde P_n^{(\bar\alpha,\bar\beta)}(x)$$

$$+ (1-x)^{\bar\alpha}(1+x)^{\bar\beta}\bar X_0 \qquad (8)$$

где

$$\frac{1}{2}<\varepsilon<1, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{\pi K+iQ}{\pi K-iQ}\right), \quad \bar\alpha = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{\pi\bar K+i\bar Q}{\pi\bar K-i\bar Q}\right)$$

$$\alpha+\beta=-1, \quad \tilde P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \lambda_n^{(\alpha,\beta)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлен Якоби

$$\lambda_m^{(\alpha,\beta)} = (2^{\alpha+\beta+1})^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{m!(\alpha+\beta+2m+1)\Gamma(\alpha+\beta+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(\beta+m+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

причем $\lambda_m^{(\alpha,\beta)} \sim m^{\frac{1}{2}}$ при $m\to\infty$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,\tilde P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\tilde P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = \begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases} \qquad (9)$$

$$\int_{-1}^{x}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{n}(1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta}\tilde{P}_n^{(1+\alpha,1+\beta)}(x) \qquad (10)$$

$$\tilde{P}_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0 \quad , \quad \tilde{P}_0^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Теперь, подставляя (7) и (8) в (5) и (6) и имея в виду формулу [1,2,5],

$$-\pi\, ctg\,\pi\alpha\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) +$$

$$+\int_{-1}^{1}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}\,\frac{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(s)}{s-x}\,ds =$$

$$= -\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\tilde{P}_n^{(1+\alpha,1+\beta)}(x)\,, \quad \mathrm{Re}(\alpha,\beta) > -1\,, \qquad |x| < 1$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n n^{-\varepsilon}\tilde{P}_n^{(1+\beta,1+\alpha)}(x)$$

$$= -\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{\lambda}{K(S-\bar{S})}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon}\int_{-1}^{x}[(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}X_n$$

$$-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}\tilde{P}_n^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}\bar{X}_n]\,ds - \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{\lambda}{\bar{K}(S-\bar{S})}$$

$$\times\int_{-1}^{x}[(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}X_0-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}\bar{X}_0]\,ds \qquad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{X}_n n^{-\varepsilon}\tilde{P}_n^{(1+\bar{\alpha},1+\bar{\beta})}(x)$$

$$= -\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{\lambda}{K(S-\bar{S})}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ell}\int_{-1}^{x}[(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}X_n$$

$$-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}\bar{P}_n^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}\bar{X}_n]\,ds - \frac{\sin\pi\bar{\alpha}}{\pi}\,\frac{\lambda}{\bar{K}(S-\bar{S})}$$

$$\times\int_{-1}^{x}[(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}X_0-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}\bar{X}_0]\,ds$$

Далее, имея в виду формулы (9), (10), уравнения (11) можно свести к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$X_m+\lambda\frac{\sin(\pi\alpha)\,m^{\ell}}{\pi K(S-\bar{S})}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\ell}(K_{m,n}^{(1)}X_n-K_{m,n}^{(2)}\bar{X}_n)+f_m^{(1)}=0$$

$$\bar{X}_m+\lambda\frac{\sin(\pi\bar{\alpha})\,m^{\ell}}{\pi\bar{K}(S-\bar{S})}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\ell}(K_{m,n}^{(3)}X_n-\bar{K}_{m,n}^{(1)}\bar{X}_n)+f_m^{(2)}=0 \tag{12}$$

$$(m=1,2,\ldots)$$

где

$$K_{m,n}^{(1)}=\frac{1}{m-1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\tilde{P}_{m-1}^{(\beta+2,\alpha+2)}(x)\,dx$$

$$K_{m,n}^{(2)}=\frac{1}{m-1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\bar{\alpha}+\beta+2}(1+x)^{\bar{\beta}+\alpha+2}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\tilde{P}_{m-1}^{(\beta+2,\alpha+2)}(x)\,dx$$

$$K_{m,n}^{(3)}=\frac{1}{m-1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+\bar{\beta}+2}(1+x)^{\beta+\bar{\alpha}+2}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\tilde{P}_{m-1}^{(\bar{\beta}+2,\bar{\alpha}+2)}(x)\,dx$$

$$(m=2,3,\ldots)$$

$$K_{1,n}^{(1)}=-\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\tilde{P}_{n-1}^{(1+\alpha,1+\beta)}(x)\,dx$$

$$K^{(2)}_{1,n} = -\frac{1}{n}\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\bar{\alpha}+\beta+2}(1+x)^{\alpha+\bar{\beta}+2}\,\bar{P}_{m-1}^{(\bar{\alpha}+1,\bar{\beta}+1)}(x)\,dx$$

$$K^{(3)}_{1,n} = -\frac{1}{n}\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+\bar{\beta}+2}(1+x)^{\bar{\alpha}+\beta+2}\,\bar{P}_{m-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\,dx$$

$$f^{(1)}_m = \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{\sin\pi\alpha}{K(\bar{\alpha}-\bar{S})}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{x}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}ds\,(1-x)^{1+\beta}(1+x)^{1+\alpha}$$

$$\times\,\bar{P}_{m-1}^{(\bar{\beta}+1,\bar{\alpha}+1)}(x)\,dx\,X_0 - \bar{X}_0\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{x}(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}ds$$

$$\times\,(1-x)^{1+\beta}(1+x)^{1+\alpha}\,\tilde{P}_{m-1}^{(\beta+1,\alpha+1)}(x)\,dx\,]$$

$$f^{(2)}_m = \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{\sin\pi\bar{\alpha}}{\bar{K}(\bar{\alpha}-\bar{S})}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{x}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}ds\,(1-x)^{1+\bar{\beta}}(1+x)^{1+\bar{\alpha}}$$

$$\times\,P_{m-1}^{(\bar{\beta}+1,\bar{\alpha}+1)}(x)\,dx\;X_0 - \bar{X}_0\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{x}(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}ds$$

$$\times\,(1-x)^{1+\bar{\beta}}(1+x)^{1+\bar{\alpha}}\,P_{n}^{(\bar{\beta}+1,\bar{\alpha}+1)}(x)\,dx\,]$$

Постоянная X_0 определяется из условия (2) и равна

$$X_0 = -\frac{S\,P\,\sin\pi\alpha}{2\pi}$$

Для доказательства квазиполной регулярности совокупности систем (12), заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(m-1)\,K^{(j)}_{m,n}|^2 < \infty \qquad (j = 1,2,3)$$

которые следуют из асимтотической формулы Дарбу для многочленов Якоби [1,2,6]

$$\bar{P}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = K(\theta)\cos(N\theta+\delta) + O(m^{-1}) \qquad m\to\infty$$

$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)^{-\beta-\frac{1}{2}} \tag{13}$$

$$N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\,,\quad \delta = -\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\,,\quad \mathrm{Re}(\alpha,\beta) > -1\,,\quad 0<\theta<\pi$$

и из неравенства Бесселя.

Тогда в силу неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ell} |(m-1) K_{m,n}^{(j)}| \leq \tag{14}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\ell} \sum_{n=1}^{\infty} |(m-1) K_{m,n}^{(j)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (j=1,2,3)$$

Имея в виду (14) при $m \to \infty$, получим

$$\max \left[\frac{\lambda}{\pi} \left| \frac{\sin \pi \alpha}{K(S-\bar{S})} \right| \frac{m^\ell}{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ell} |(m-1) K_{m,n}^{(1)}| + \right.$$

$$+ |(m-1) K_{m,n}^{(2)}| \frac{\lambda}{\pi} \left| \frac{\sin \pi \bar{\alpha}}{K(S-\bar{S})} \right| \frac{m^\ell}{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ell} |(m-1) K_{m,n}^{(3)}| +$$

$$\left. + |(m-1) K_{m,n}^{(2)}| \right] < \frac{c}{m^{1+\varepsilon}} \tag{15}$$

Относительно свободных членов уравнений (12) можно сказать, что они, по крайней мере, ограничены при $m \to \infty$ (это следует из (13) и неравенства Бесселя).

Таким образом, решение системы уравнений (12) надо искать в пространстве ограниченных последовательностей. В таком случае в силу (15) совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (12) будет квазивполне регулярна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1976. 534 с.*
2. *Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.- Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 256 с.*
3. *Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.-М.: Наука, 1980. 304 с.*
4. *Григорян Э.Х., Мелконян Б.А. Об одной задаче для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными стрингерами.- Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1981, 3, с. 45-49.*
5. *Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. - Киев-Одесса; Головное издательское объединение "Выща школа", 1982. 167 с.*
6. *Сеге Г. Ортогональные многочлены.- М.: Физматгиз, 1962.*

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 27.03.1992