ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44, № 6, 1991 Механика

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ ВО ВНЕШНИХ КВАЗИУСТАНОВИВШИХСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

ГАЧКЕВИЧ А.Р.

Գաչկևիչ Ա.Ռ., Արտաքին քվազիհաստատված էլեկտրամագնիսական դաշտերում էլեկտրահաղորդիչ մարմինների ջերմամեխանիկական վարքի մաթեմատիկական մոդելավորումը։

Gachkevich A.R. Mathematical modelliing of thermomechanical behavior of electroconductive bodies in the external quasi-steady electromagnetic fields.

Շարադրված է մագնիսացման և բևեռացման տարբեր հատկություններ ունեցող էլեկտրահաղորդիչ մարմիններում էլեկտրամագնիսական, ջերմային և մեխանիկական դաշտերի քանակական նկարագրման տեսության տարբերակ։ Բերված են կոնկրետ մարմիններում դիտարկվող դաշտերի բնութագրերի ուսումնասիրման արդյունքները կախված նյութի էլեկտրաֆիզիկական հատկություններից։

Изложен вариант теории количественого описания электромагнитных, температурных и механических полей в электропроводных телах различной способности к намагничиванию и поляризации. Приведены результаты исследований характеристик рассматриваемых полей в конкретных телах в зависимости от электрофизических свойств их материала

В связи с расширяющимся использованием во многих отраслях промышленности электромагнитных полей для осуществления различных технологических процессов, в последнее время возрастает интерес к математическому моделированию, обусловленных такими воздействиями физических явлений в деформируемых телах [1-8]. В статье изложены результаты по дальнейшему развитию модельных представлений о термомеханическом поведении неферромагнитных неполяризуемых электропроводных тел [1,3], находящихся под воздействием квазиустановившихся электромагнитных полей,на случай электропроводных тел, способных к намагничиванию и поляризации. Взаимосвязь электромагнитных, тепловых и механических процессов осуществляется джоулевым теплом и тепловыделениями вследствие намагничивания и поляризации пондеромоторными силами, а также термоупругим рассеянием энергии.

1.*Постановка задачи.* Ставится задача об определнии электромагнитного, температурного и механических полей в упругих телах различной электропроводности и способности к намагничиванию и поляризации, когда в области вне тела заданы квазиустановившиеся электрические токи [3]

$$\mathbf{j}_{**}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\, j_{*}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\, [\, j^{(0)}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t)\,] \qquad (1.1)$$

амплитуда $\mathbf{j}_{*}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ которых относительно мало изменяется во времени на периоде колебания $t_1 = \dfrac{2\pi}{\omega}$, так что выполняется условие

$$\left| \frac{\partial \mathbf{j}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right| << \omega \left| \mathbf{j}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \right| \qquad (1.2)$$

В математической схеме решения задачи примем, что электромагнитное поле по отношению к телу является внешним воздействием и его влияние на процессы теплопроводности и деформации осуществляется посредством тепловыделений и пондеромоторных сил [1,3,6,7] Тогда исходная задача в принятом приближении описывается известными уравнениями электродинамики для области тела и внешней среды [3], а также динамической термоупругости [1,3] при соответствующих рассматриваемому случаю начальных и граничных условиях на электромагнитное поле, температуру и напряженное состояние.

Система уравнений электродинамики замыкается феноменологическими соотношениями, связывающими характеристики поля между собой и с электрическими токами.

Будем рассматривать широко распространенные изотропные среды, вектора индукций $\mathbf{D}_{**}$, $\mathbf{B}_{**}$, в которых соответственно параллельны векторам напряженностей электрического E_{**} и магнитного H_{**} полей [9]

$$\mathbf{D}_{**} = D_{**}(E_{**})\,\mathbf{e}_E\,, \quad \mathbf{B}_{**} = B_{**}(H_{**})\,\mathbf{e}_H \qquad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{e}_E = \dfrac{\mathbf{E}_{**}}{E_{**}}$, $\mathbf{e}_H = \dfrac{\mathbf{H}_{**}}{H_{**}}$ - единичные орты в направлениях векторов $\mathbf{E}_{**}$, $\mathbf{H}_{**}$; E_{**}, D_{**} - проекции векторов $\mathbf{E}_{**}$, $\mathbf{D}_{**}$ на положительное направление вектора $\mathbf{E}_{**}$, а H_{**} и B_{**} - векторов $\mathbf{H}_{**}$ и $\mathbf{B}_{**}$ на положительное направление вектора $\mathbf{H}_{**}$.

Будем пренебрегать влиянием подвижности среды на электрические токи, то есть закон Ома примем следующим:

$$\mathbf{j}_{**} = \sigma\, \mathbf{E}_{**} \qquad (1.4)$$

где σ -коэффициент электропроводности.

Соотношения (1.3) можно также записать в виде

$$\mathbf{D}_{**} = \varepsilon\,(E_{**})\,\mathbf{E}_{**}\,, \quad \mathbf{B}_{**} = \mu\,(H_{**})\,\mathbf{H}_{**} \qquad (1.5)$$

Здесь

$$\varepsilon\,(E_{**}) = \frac{D_{**}(E_{**})}{E_{**}} = \varepsilon_0 + \kappa_E\,(E_{**})$$

$$\mu\,(H_{**}) = \frac{B_{**}(H_{**})}{H_{**}} = \mu_0 + \kappa_H\,(H_{**})$$

-абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости тела, κ_E, κ_μ - абсолютные электрическая и магнитная восприимчивости ; ε_0, μ_0 -диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

Для области внешней среды соотношения, связывающие характеристики электромагнитного поля, принимаются такими же, как и для вакуума [9]

$$D_{\bullet\bullet}^{(0)} = \varepsilon_0 E_{\bullet\bullet}^{(0)}, \quad B_{\bullet\bullet}^{(0)} = \mu_0 H_{\bullet\bullet}^{(0)} \tag{1.6}$$

Для рассматриваемых тел при воздействии квазиустановившегося электромагнитного поля диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости определяются , в основном, электрофизическими свойствами материала рассматриваемого тела и характеристиками электромагнитного воздействия. Для неполяризуемых неферромагнитных электропроводных тел обычно полагают, что ε и μ не зависят от $E_{\bullet\bullet}$ и $H_{\bullet\bullet}$, для неполяризуемых ферромагнитных - что ε не зависит от $E_{\bullet\bullet}$, а $\mu = \mu(H_{\bullet\bullet})$, для неферромагнитных поляризуемых - что $\varepsilon = \varepsilon(E_{\bullet\bullet})$, а μ не зависит от $H_{\bullet\bullet}$.В соответствии с этим выделим следующие типы электропроводных тел: неферромагнитные неполяризуемые, ферромагнитные неполяризуемые и неферромагнитные низкой электропроводимости. Построим расчетные схемы для каждого из выделенных типов тел на основе характерных для них зависимостей между индукциями и напряженностями электрического и магнитного полей, а также соотношений электродинамики и выражений тепловыделений $Q_\bullet$ и пондеромоторных сил $F_\bullet$ через характеристики полей. При этом решение задачи состоит из двух этапов. На первом этапе из уравнений электродинамики определяются напряженности электрического и магнитного полей в квазиустановившемся приближении на основе предложенных аналитических аппроксимаций зависимостей между индукциями и напряженностями электрического и магнитного полей для конкретного типа тела. После этого записываются соответствующие выражения тепловыделений и пондеромоторных сил. На втором этапе решается задача динамической термоупругости, в которой источниками тепла и объемными силами в исходных уравнениях [3] есть найденные на первом этапе тепловыделения и пондеромоторные силы.

2.*Неферромагнитные неполяризуемые тела*. Для таких тел феноменологические соотношения электродинамики, с учетом вышесказанного, принимают следующими:

$$D_{\bullet\bullet} = \varepsilon_0 \varepsilon_\bullet E_{\bullet\bullet}, \quad B_{\bullet\bullet} = \mu_0 \mu_\bullet H_{\bullet\bullet}, \quad j_{\bullet\bullet} = \sigma E_{\bullet\bullet} \tag{2.1}$$

где $\varepsilon_\bullet = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, $\mu_\bullet = \dfrac{\mu}{\mu_0}$ - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости тела, которые считаются постоянными [9]. При этом система исходных уравнений Максвелла приводится к системе известных разрешающих уравнений для функций $E_{\bullet\bullet}$ или $B_{\bullet\bullet}$ [3,9] , а задача первого этапа (электродинамики) формулируется полностью относительно любой из этих функций.

Будем исходить из того,что найдено решение задачи электродинамики при заданных условиях (1.1),(1.2) и определены комплексные напряженности электрического и магнитного полей в теле $E_\bullet(r,t) = E_\bullet(r,t)e^{i\omega t}$, $H_\bullet(r,t) = H_\bullet(r,t)e^{i\omega t}$.

Тогда выражения для удельной мощности джоулева тепла $Q_* = \mathbf{j}_{**}\mathbf{E}_{**} = \sigma\,\mathbf{E}_{**}\mathbf{E}_{**}$ и удельной плотности пондеромоторных сил $\mathbf{F}_* = \mu\mathbf{j}_{**}\times\mathbf{H}_{**} = \mu\sigma\,\mathbf{E}_{**}\times\mathbf{H}_{**}$ примут вид

$$Q_* = Q^{(1)} + Q^{(2)}, \quad F_* = F^{(1)} + F^{(2)} \tag{2.2}$$

Здесь

$$Q^{(1)} = \frac{\sigma}{2}\,\mathbf{E}_*\,\overline{\mathbf{E}}_* = \frac{\sigma}{2}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\,\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$$

$$Q^{(2)} = \frac{\sigma}{4}\left(\mathbf{E}_*^{2} + \overline{\mathbf{E}}_*^{2}\right) = \frac{\sigma}{2}\,\mathrm{Re}\,\left[\left(\mathbf{E}_*^{2}(\mathbf{r},t)\right)e^{2i\omega t}\right]$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = \frac{\sigma\mu}{4}\left(\mathbf{E}_*\times\overline{\mathbf{H}}_* + \overline{\mathbf{E}}_*\times\mathbf{H}_*\right)$$

$$= \frac{\sigma\mu}{4}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) + \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\right]$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = \frac{\sigma\mu}{4}\left(\mathbf{E}_*\times\mathbf{H}_* + \overline{\mathbf{E}}_*\times\overline{\mathbf{H}}_*\right)$$

$$= \frac{\sigma\mu}{2}\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\,e^{2i\omega t}\right]$$

знаком " - " обозначены комплексно - сопряженные величины. Составляющие $Q^{(1)}$ и $F^{(1)}$ - малоизменяющиеся во времени на периоде $t_* = \frac{2\pi}{\omega}$ функции, а $Q^{(2)}$ и $F^{(2)}$ - квазиустановившиеся.

В соответствии со структурой (2.2) джоулевых тепловыделений и пондеромоторных сил, температуру T и тензор напряжений $\bar{\sigma}$ определяем в виде

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{(1)} + \bar{\sigma}^{(2)} \tag{2.3}$$

где функции $T^{(j)}$, $\bar{\sigma}^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ удовлетворяют уравнениям связанной термоупругости для $Q_* = Q^{(j)}$ и $F_* = F^{(j)}$ при соответствующих начальных и граничных условиях. Составляющие $T^{(1)}$ и $\bar{\sigma}^{(1)}$ находим в квазистатической постановке, пренебрегая связанностью полей деформации и температуры, а функции $T^{(2)}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}$ - в квазиустановившемся представлении [3].

Выполненные в такой постановке исследования показали [3,7], что в окрестности частот электромагнитного поля $\omega_n = \frac{1}{2}\,\omega_n^*$ $(n = \overline{1,\infty})$, где ω_n^* -собственные частоты термоупругих колебаний тела, значительно увеличиваются уровни квазиустановившихся составляющих температуры и напряжений и становятся соизмеримыми с квазистатическими, то есть имеют место резонансные явления. При этом высокие уровни квазиустановившихся составляющих температуры обусловлены связанностью полей деформации и температуры. С увеличением номера резонансной частоты амплитуды квазиустановившихся составляющих $T^{(2)}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}$ уменьшаются.

В силу малости параметра связанности полей деформации и температуры для металлических материалов ($\varepsilon_{**} << 1$) [3], каждая из собственных частот термоупругих колебаний ω_n^* практически равна соответствующей собственной частоте колебаний исследуемого тела.

Окрестность резонансной частоты (величина отклонения $\Delta\omega_1$ частоты ω от первой резонансной ω_1), в которой максимальное значение напряжений $\bar{\sigma}^{(2)}$ составляет не менее 10% наибольшего значения $\bar{\sigma}^{(1)}$ в установившемся режиме, не зависит от характеристик электромагнитного поля и является узкой (практически она меньше 0.1 % от значения частоты). В этой окрестности максимальные величины составляющих $T^{(2)}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}$ обусловлены пондеромоторными силами (влияние джоулевых тепловыделений пренебрежимо мало) и незначительно зависят от критерия Био. Вне резонансных окрестностей определяющее влияние на термонапряженное состояние имеют джоулевы тепловыделения, усредненные по периоду электромагнитной волны.

3. *Ферромагнитные неполяризуемые тела.* Для таких тел феноменологические соотношения электродинамики, в соответствии с выражениями (1.4), (1.6), примем следующими:

$$D_{**} = \varepsilon_0 \varepsilon_* E_{**}, \quad B_{**} = B_{**}(H_{**})e_H = \mu(H_{**})H_{**}$$

$$j_{**} = \sigma E_{**} \tag{3.1}$$

Нелинейную зависимость $B_{**} = B_{**}(H_{**})$ будем описывать динамической петлей гистерезиса, аналитическое выражение которой при периодической во времени напряженности магнитного поля ($H_{**} = C\cos\omega t + D\sin\omega t$) можно записать в виде [10]

$$B_{**} = \mu_0 H + \beta\,\mathrm{arctg}\,\alpha H \tag{3.2}$$

Здесь

$$H = \sqrt{1 - \chi^2}\; H_{**} - \frac{\chi}{\omega}\frac{\partial H_{**}}{\partial t}$$

$$\chi = \frac{H_c}{H_m} \qquad \text{при} \quad H_{**} \le H_m$$

$$\chi = \frac{H_c}{H_0} \qquad \text{при} \quad H_{**} > H_m$$

H_c - коэрцитивная сила; H_0 и H_m - величина напряженности магнитного поля на поверхности тела и соответствующая гистерезисному насыщению, причем H_0 в силу условий (1.2) считается постоянной на периоде $t_* = \frac{2\pi}{\omega}$; $\beta = \frac{2}{\pi} B_s$; $\alpha = (\mu_H - 1)\frac{\mu_0}{\beta}$; μ_H - начальная относительная магнитная проницаемость материала; B_s - величина индукции насыщения. В случае $\chi = 0$ соотношение (3.2) описывает основную кривую намагничивания, а также зависимость между $B_{\bullet\bullet}$ и $H_{\bullet\bullet}$ в телах, практически не обладающих гистерезисной кривой намагничивания (магнитомягкие тела) . Отметим, что эллиптическая зависимость между $B_{\bullet\bullet}$ и $H_{\bullet\bullet}$, характерная для малых амплитуд и высоких частот следует из соотношения (3.2) при $B_s \to \infty$ и будет

$$B_{\bullet\bullet} = \mu_0 \ \mu_H \ (\sqrt{1 - \chi^2} \ H_{\bullet\bullet} - \frac{\chi}{\omega} \frac{\partial H_{\bullet\bullet}}{\partial t}) \tag{3.3}$$

Представив функцию $B_{\bullet\bullet}(H_{\bullet\bullet})$ в виде линейной и нелинейной составляющих, то есть

$$B_{\bullet\bullet} = B_л + B_{\bullet} \tag{3.4}$$

где

$$B_л = \mu_0 \ \mu_\varepsilon \ H \quad , \quad B_{\bullet} \equiv B (H) - B_л = \mu_0 (1 - \mu_\varepsilon) H$$

$$+ \beta \ arctg \ \alpha H$$

$$\mu_\varepsilon = 1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\mu_H - 1) \ arctg \sqrt{\varepsilon} \ , \quad \varepsilon = (\alpha H_0)^2$$

из уравнений Максвелла придем к такой системе исходных квазилинейных уравнений электродинамики для функции $\mathbf{H}_{\bullet\bullet}$

$$\Delta \mathbf{H}_{\bullet\bullet} - grad \ div \mathbf{H}_{\bullet\bullet} - \sigma \ \mu_0 \ \mu_\varepsilon \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \sigma \ \frac{\partial \mathbf{B}_{\bullet}}{\partial t}$$

$$div \mathbf{H} = - \mu_0^{-1} \ \mu_\varepsilon^{-1} \ div \mathbf{B}_{\bullet} \tag{3.5}$$

где

$$\mathbf{H} = H \mathbf{e}_H \ , \quad \mathbf{B}_{\bullet} = [\mu_0 (1 - \mu_\varepsilon) \ H \ + \ \beta \ arctg \alpha H \ ] \mathbf{e}_H$$

Для определения функции $\mathbf{H}_{\bullet\bullet}$ (решения задачи первого этапа) используем метод последовательных приближений. В качестве первого приближения выбираем решение системы (3.5) при $\mathbf{B}_{\bullet} = 0$ и заданных граничных условиях. Последующие приближения определяем из уравнений

$$\Delta \mathbf{H}_{\bullet\bullet(n)} - grad \ div \mathbf{H}_{\bullet\bullet(n)} - \sigma \ \mu_0 \ \mu_\varepsilon \frac{\partial \mathbf{H}_{\bullet\bullet(n)}}{\partial t} =$$

$$= \sigma \ \frac{\partial \mathbf{B}_{\bullet} (\mathbf{H}_{\bullet\bullet(n-1)})}{\partial t} \tag{3.6}$$

$$div \ \mathbf{H}_{(n)} = - \mu_0^{-1} \ \mu_\varepsilon^{-1} \ div \ B_{\bullet} (\mathbf{H}_{\bullet\bullet(n-1)}) , \quad (n = \overline{2 , \infty})$$

В квазиустановившемся приближении, с использованием соответствующих разложений в ряды Фурье по времени, функции $H_{..}$ и $E_{..}$, а также $B_{..}$ для n - й итерации можно записать в виде

$$\psi_{(n)}(r, t) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, \psi_{(n)\, 2k+1}(r, t) \exp[i(2k+1)\omega t] \tag{3.7}$$

где $\psi = [H_{..}, E_{..}, B_{..}]$, $\psi_{(n)\, 2k+1}$ - относительно мало изменяющиеся во времени на порядке f. функции.

При известной напряженности магнитного поля $H_{..}$ джоулевы тепловыделения удобно выразить формулой

$$Q = \frac{1}{\sigma}(rot\, H_{..})^2 \tag{3.8}$$

Силовое воздействие электромагнитного поля на электропроводное ферромагнитное тело характеризуется пондеромоторными силами [1,11]

$$F_{.} = F^{(J)} + F^{(M)}$$

где

$$F^{(J)} = rot\, H_{..} \times B_{..}, \quad F^{(M)} = \mu_0^{-1}[(M\nabla)B_{..} + M \times rot\, B_{..}] \tag{3.9}$$

а также моментом сил $S = M \times B_{..}$.

Здесь $F^{(J)}$ и $F^{(M)}$ - силы воздействия поля соответственно на токи проводимости и молекулярные, $M = B_{..} - \mu_0 H_{..}$ - намагниченность. В силу принятого условия параллельности векторов M и $H_{..}$ получим, что $S = 0$.

Вследствие структуры выражений (3.7), тепловыделения (3.8) и пондеромоторная сила (3.9) представляются в виде спектра медленноизменяющихся во времени и квазиустановившихся составляющих. В соответствии с этим температуру и напряжения на втором этапе построения решения будем находить в виде

$$W = W^{(1)} + W^{(2)} \tag{3.10}$$

где $W = [T, \bar{\sigma}]$. Медленноизменяющиеся во времени составляющие температурного поля $T^{(1)}$ и напряжений $\bar{\sigma}^{(1)}$ как и ранее для неферромагнитных тел определяем в квазистатической постановке, пренебрегая связанностью полей деформации и температуры, а $T^{(2)}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}$ -в квазиустановившемся режиме, то есть имеющими структуру

$$W^{(2)} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, [W^{(2,2m)} e^{2im\omega t}] \tag{3.11}$$

При этом, следуя результатам работы [11], принимаем, что квазиустановившиеся составляющие температурного поля и напряжений обусловлены квазиустановившимися компонентами пондеромоторной силы. Квазистатические же составляющие вызваны как медленноизменяющимися во времени компонентами джоулева тепла и пондеромоторной силы, так и дополнительными тепловыделениями, возникающими вследствии перемагничивания, удельная плотность которых после усреднения по периоду электромагнитной волны $t_* = \frac{1}{\nu}$ будет

$$Q_T = \nu \int H_{**}\, dB_* = \nu \int_0^{t_*} H_{**} \frac{\partial B_*}{\partial t}\, dt \qquad (3.12)$$

Проведенные с использованием описанной методики численные исследования [10,11] показали, что для ферромагнитного тела имеются дополнительные по сравнению с неффеpомагнитным спектры резонансных частот электромагнитного поля $\omega_{nm} = \frac{\omega_n}{m}$, $m = \overline{2, \infty}$ окрестность $\Delta\omega_n$ резонансных частот зависит от величины амплитудного значения напряженности магнитного поля H_0 и при $\beta_{**} \leq \beta_s$ значительно расширяется (больше чем на порядок) по сравнению с аналогичной для тела из эквивалентного неферромагнитного материала (имеющего $\mu_* = 1$).

Значения характеристик исследуемых процессов существенно зависят от параметров μ_* и χ. При $\chi \geq 0{,}05$ максимальные тепловыделения вследствие перемагничивания становятся соизмеримы с джоулевыми. Для материалов и полей, при которых $\mu_* > 100$, квазистатические составляющие напряжений, обусловленные медленноизменяющимися во времени компонентами пондеромоторной силы, одного порядка с аналогичными от джоулевых тепловыделений.

4. *Тела низкой электропроводимости.* К таким телам отнесем неферроэлектрические тела, которые по своим поляризационным свойствам близки к диэлектрикам и имеют коэффицент электропроводности $\sigma \leq 100$ **см**. Для этих тел феноменологические соотношения элекродинамики будут

$$D_{**} = D_{**}(E_{**})e_E = \varepsilon(E_{**})E_{**}$$

$$B_{**} = \mu_0 \mu_* H_{**}, \quad j_{**} = \sigma E_{**} \qquad (4.1)$$

Для установления вида функции $D_{**}(E_{**})$ будем исходить из следующего известного представления вектора поляризации $P = D_{**} - \varepsilon_0 E_{**}$ [9]

$$P = P_M + P_p \qquad (4.2)$$

где P_M, P_p -соответственно векторы мгновенной (упругой) и релаксационной поляризации, которые связаны с напряженностью E_{**} соотношениями

$$P_M = \varepsilon_0 \kappa_m E_{**}, \quad \frac{\partial P_p}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \kappa_p E_{**} - P_p}{\tau_p} \qquad (4.3)$$

Здесь κ_M, κ_p - диэлектрические проницаемости, характеризующие мгновенную и релаксационную поляризации, τ_p - время релаксации. С учетом соотношений (4.1)-(4.3) зависимость между индукцией D_{**} и напряженостью E_{**} для начально неполяризованного тела низкой электропроводимости примет вид

$$D_{**}(r,t) = (1+\kappa_M)\varepsilon_0 E_{**}(r,t)$$

$$+\varepsilon_0\kappa_p\tau_p^{-1}\int_0^t E_{**}(r,t)\exp\left(\frac{t'-t}{\tau_p}\right)dt' \qquad (4.4)$$

Следуя работе [3] и используя уравнения Максвелла, можно показать, что если свободные заряды в теле в начальный момент времени отсутствуют, то их объемная плотность (и при зависимостях (4.3)) равна нулю и в произвольный момент времени ($Q \equiv 0$).

Для квазиустановившегося электромагнитного поля при $\omega << \frac{1}{\tau_p}$, а также для монохроматического воздействия, исходя из (4.4), можно ввести комплексные амплитуды $E(r,t)$, $D(r,t)$ напряженности электрического поля и электрической индукции, связанные соотношением

$$D(r,t) = \varepsilon_0\varepsilon_*' E(r,t) \qquad (4.5)$$

где $\varepsilon_*' = \varepsilon' - i\varepsilon''$ - комплексная диэлектрическая проницаемость,

$$\varepsilon' = 1+\kappa_M+\frac{\kappa_p}{1+(\omega\tau_p)^2}, \quad \varepsilon'' = \frac{\kappa_p\omega\tau_p}{1+(\omega\tau_p)^2} \qquad (4.6)$$

Зависимости (4.6) ε' и ε'' от частоты, следующие из закона релаксации (4.3), для большинства тел низкой электропроводимости удовлетворительно описывают дисперсию диэлектрической проницаемости ε_*' с частотой. Однако эти зависимости могут быть установлены и непосредственно из эксперимента и учтены в выражении (4.5).

При феноменологическом соотношении (4.5) из уравнений Максвелла, с учетом условий квазиустановленности на напряженности электрического и магнитного полей ,аналогичных (1.2),и того, что $Q \equiv 0$, придем к следующей системе урвнений на функцию $E(r,t)$ в области тела:

$$\Delta E + k^2 E = 0, \qquad div E = 0 \qquad (4.7)$$

где

$$k^2 = \mu_0\omega[\varepsilon_0\omega\varepsilon' - i(\sigma+\varepsilon_0\varepsilon''\omega]$$

Отметим, что соотношение (4.5) соответствует эллиптической зависимости между индукцией и напряженностью электрического поля.

При найденных комплексных напряженностях электрического и магнитного полей выражения для тепловыделений в теле (джоулевых и обусловленных поляризацией) и пондеромоторных сил запишутся [12,13]

$$Q_* = Q_Д + Q_Г, \quad F_* = F_k + F_A \qquad (4.8)$$

где

$$Q_Д = \sigma\, [\mathrm{Re}(\mathbf{E}\ (\mathbf{r}, t)\, e^{i\omega t}\,]^2$$

$$Q_i = \omega \varepsilon_0\, \varepsilon''\, [\mathrm{Re}(\mathbf{E}\ (\mathbf{r}, t)\, e^{i\omega t}\,]^2$$

- плотности джоулевых и поляризационных тепловыделений ;

$$\mathbf{F}_k = (\mathbf{P}\ \nabla)\,\mathbf{E}_{..}\ ,\quad \mathbf{F}_A = (\sigma\,\mathbf{E}_{..} + \frac{\partial \mathbf{D}_{..}}{\partial t})\times \mu_0 \mathbf{H}_{..}$$

-силы воздействия на диполи (сила Кельвина) и токи, в том числе поляризационные (сила Ампера).

Для начально поляризованных тел и в случае $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}_{..}$ необходимо учитывать также момент сил [13], а при $\Omega \neq 0$ - и силу воздействия на заряды $\mathbf{F}_c = \mathbf{E}_{..}\, div\, \mathbf{D}_{..}$ (силу Кулона).

Для рассматриваемых тел низкой электропроводимости представления тепловыделений и пондеромоторных сил по структуре аналогичны (2.2). Поэтому температуру и компоненты тензора напряжений находим в виде (2.3).

Выполненные на основе модели численные исследования показали [12], что при размерах тела значительно меньше длины падающей электромагнитной волны $\lambda_{\cdot} = c_0 / f_{\cdot}$, где $c_0 = (\varepsilon_0\, \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$, характеристики электромагнитного поля распределены равномерно, а при размерах порядка и больше длины волны их распределение неравномерно, что приводит к образованию по толщине зон более сильных и слабых тепловыделений. При совпадении одного из размеров тела с полудлиной волны, определяемой частотой внешнего воздействия, имеет место значительное увеличение напряженностей электрического и магнитного полей. Как следствие, в окрестностях таких частот достигают больших значений и уровни температуры и напряжений.

Имеют место резонансные явления, обусловленные периодическим характером изменения во времени тепловыделений и пондеромоторных сил, аналогичные как и для неферромагнитных неполяризуемых тел. При этом влияние пондеромоторных сил на резонансные явления пренебрежимо мало по сравнению с влиянием тепловыделений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Магнитоупругость. В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела.- М.: Изд. ВИНИТИ, 1981, т. 14, с. 3-59.*
2. *Белубекян М.В., Казарян К.Б. Магнитоупругая устойчивость тонких тел, служащих для транспортировки электрического тока. -Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1989, т. 42, N 2, с. 13-21.*
3. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. - Киев: Наук. думка, 1977. 248 с.*
4. *Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 - х т. -М.: Наука, 1976. Т. 1, 536 с.*
5. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. - М. Наука, 1977, 272 с.*
6. *Дресвянников В.И. Численное моделирование нестационарных магнитотермопластических процессов в электропроводящих средах. - Проблемы прочности, 1984, N 10, с. 85-89.*

7. Партон В.З. Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел .-М. :Наука, 1988. 472 с.
8. Родигин Н.М. Индукционый нагрев стальных изделий токами нормальной частоты.- М.: Свердловск: Металлургиздат, 1950. 248 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. -М. :Физматгиз, 1959. 532 с
10. Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Солодяк М.Т. Термоупругость электропроводных магнитотвердых тел во внешних установившихся электромагнитных полях. - Докл. АН УССР, Сер. А., 1989, N 6, с. 39 -43.
11. Бурак Я.И., Гачкевич А.Р, Солодяк М.Т. Термоупругость электропроводных магнитомягких тел во внешних установившихся электромагнитных полях. -Докл. АН УССР. Сер. А, 1987, N 2, с. 44 - 48.
12. Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Терлецкий Р.Ф. Термомеханика тел низкой электропроводимости во внешних квазиустановившихся электромагнитных полях. -Докл. АН УССР. Сер.А, 1989, N 6, 39 -43 с.
13. Поливанов К.М. Электродинамика движущихся тел. - М.: Энергоиздат, 1982. 192 с.

Институт прикладных проблем механики и
математики АН Украины
Поступила в редакцию 1. 05. 1991