

ПОВЕДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В  
ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ЛИНИИ РАЗДЕЛА  
КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Апикян Ж.Г., Саргсян А.М.

Ապիկյան Չ.Գ., Սարգսյան Ա.Մ., ստացիոնար ֆիզիկական դաշտերի վարքը կտր-առ-կտր համասեռ գլանային աճիգոտրոպ մարմնի ընդլայնական կտրվածքի տիրույթների քաժանման գծի աճկյունային կետի շրջակայքում

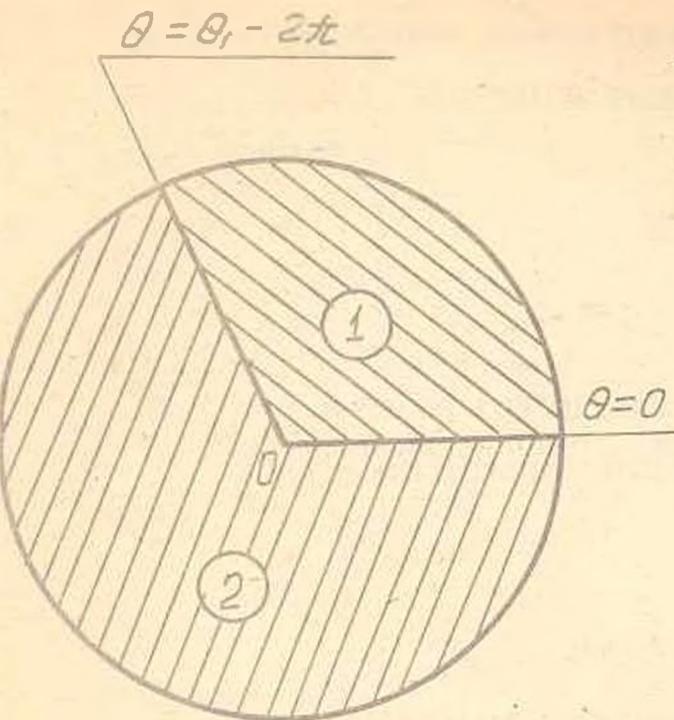
Apikian J.G., Sargsian A.M. Stationary physical field behavior in the vicinity of an angle point of the separation line of step by step homogeneous anisotropic media

Ստուժնասիրված է հարթ ստացիոնար ֆիզիկական դաշտերի բնութագրիչների վարքը կտր-առ-կտր համասեռ գլանային աճիգոտրոպ մարմնի ընդլայնական կտրվածքի տիրույթների քաժանման գծի աճկյունային կետի շրջակայքում:

Исследовано поведение характеристик плоских стационарных физических полей в окрестности угловой точки линии раздела областей поперечного сечения кусочно-однородного тела, составленного из двух различных цилиндрических анизотропных призматических тел, спаянных между собой по боковой поверхности.

Исследованию поведения плоских стационарных физических полей в окрестности края поверхности соединения кусочно-однородного изотропного и анизотропного тела при различных условиях на его боковой поверхности посвящены работы [1-4]. В пространстве геометрических и физических параметров кусочно-однородного тела получены уравнения поверхности, разделяющей области, где характеристики соответствующих полей (упругие напряжения при кручении и продольном сдвиге, потоки тепла и вещества в задачах теплопроводности и диффузии, напряженность электрического и магнитного полей, плотность постоянного тока и т.д.) в окрестности края поверхности соединения стремятся к нулю или бесконечности.

В работе [1] исследовано также решение задачи кручения кусочно-однородного изотропного призматического стержня около угловой точки линии раздела областей его поперечного сечения (фиг.1). Показано, что напряжения кручения бесконечно возрастают при приближении к угловой точке линии раздела всегда, кроме случая  $\theta_1 = \pi$ , что соответствует от-



Фиг. 1

существом угловой точки на линии раздела.

В настоящей работе с помощью местных решений исследовано поведение характеристик плоских стационарных физических полей в окрестности угловой точки линии раздела областей поперечного сечения кусочно-однородного тела, составленного из двух различных цилиндрически анизотропных призматических тел, спаянных между собой по боковой поверхности (фиг. 1). Поперечное сечение составного тела является плоскостью упругой симметрии. Ось анизотропии принимается за ось  $z$  цилиндрической системы координат  $r, \theta, z$  с началом  $0$  в точке поперечного сечения.

При отсутствии источников возмущения потенциалы плоских полей  $U_k(r, \theta)$  ( $k = 1, 2$ ) удовлетворяют уравнению [5,6]

$$\chi_{22}^{(k)} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{\chi_{22}^{(k)}}{r} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \frac{2\chi_{12}^{(k)}}{r} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r \partial \theta} + \frac{\chi_{11}^{(k)}}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

$$k = 1, \quad 0 < \theta < \theta_1; \quad k = 2, \quad -\theta_2 < \theta < 0; \quad \theta_2 = 2\pi - \theta_1$$

На ветвях линии раздела имеем следующие условия сопряжения:

$$U_1(r, \theta) |_{\theta=0} = U_2(r, \theta) |_{\theta=0} \quad (2)$$

$$\left( \frac{a_{11}^{(1)}}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + a_{12}^{(1)} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) |_{\theta=0}$$

$$= \left( \frac{a_{11}^{(2)}}{r} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + a_{12}^{(2)} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) |_{\theta=0} \quad (3)$$

$$U_1(r, \theta) |_{\theta=\theta_1} = U_2(r, \theta) |_{\theta=\theta_1-2\pi} \quad (4)$$

$$\left( \frac{a_{11}^{(1)}}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + a_{12}^{(1)} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) |_{\theta=0} = \left( \frac{a_{11}^{(2)}}{r} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + a_{12}^{(2)} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) |_{\theta=\theta_1-2\pi} \quad (5)$$

где  $\chi_{11}^{(k)}, \chi_{22}^{(k)}, \chi_{12}^{(k)}$  ( $k=1, 2$ ) — [1,2]-постоянные, характеризующие физические свойства неоднородной анизотропной среды (упругие постоянные, диэлектрические и магнитные проницаемости, коэффициенты теплопроводности, диффузии, электропроводности и т.д.).

Компоненты характеристик полей выражаются через  $U_k(r, \theta)$  следующими формулами:

$$H_r^{(k)}(r, \theta) = \frac{\chi_{12}^{(k)}}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \theta} + \chi_{22}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} \quad (6)$$

$$H_\theta^{(k)}(r, \theta) = \frac{\chi_{11}^{(k)}}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \theta} + \chi_{12}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} \quad (7)$$

Методом разделения переменных решение уравнения (1) представим в виде

$$U_k(r, \theta) = r^\rho (A_k \cos p \tau_k \theta + B_k \sin p \tau_k \theta) \exp(-\sigma_k \rho) \quad (8)$$

где  $\rho$  — произвольный параметр,

$$\tau_k = \sqrt{a_{22}^{(k)} / a_{11}^{(k)} - \sigma_k^2}, \quad \sigma_k = a_{12}^{(k)} / a_{11}^{(k)} \quad (9)$$

Удовлетворяя условиям сопряжения (2)-(5), получим однородную систему линейных уравнений, из условия существования нетривиального решения которой следует

$$\frac{4\chi}{(1+\chi)^2} \operatorname{sh}^2(\pi^* \rho^*) + \sin^2(\pi \rho^*) = \frac{(1-\chi)^2}{(1+\chi)^2} \sin^2(\pi - \theta_1^*) \rho^* \quad (10)$$

где

$$\rho^* = \frac{\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2}{2\pi} \rho, \quad \pi^* = \frac{\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2}{\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2} \pi \quad (11)$$

$$\chi = \frac{a_{11}^{(2)} \tau_2}{a_{11}^{(1)} \tau_1}, \quad \theta_1^* = \frac{2\pi \tau_2 \theta_2}{\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2} \quad (12)$$

Уравнение (10) при конкретных значениях параметров  $\chi, \sigma_k, \theta_1$  имеет бесконечное множество корней, которые могут быть пронумерованы по порядку возрастания их действительных частей.

Общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$U_k(r, \theta) = A_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\rho_n} (A_{kn} \cos p_n \tau_k \theta$$

$$+ B_{kn} \sin p_n \tau k \theta) \exp(-\sigma_k p_n) \quad (13)$$

где суммирование распространяется на все корни уравнения (10), для которых  $\operatorname{Re} p_n > 0$ . Необходимость отбрасывания корней с отрицательными действительными частями вытекает из условия конечности накопленной удельной энергии в окрестности угловой точки линии раздела [1].

Из представления (13) и (6,7) видно, что если  $0 < \operatorname{Re} p_1 < 1$ , то при приближении к угловой точке линии раздела областей поперечного сечения характеристики полей неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен  $|\operatorname{Re} p_1 - 1|$ . Если  $\operatorname{Re} p_1 > 1$ , то характеристики убывают до нуля при  $r \rightarrow 0$ . В случае  $\operatorname{Re} p_1 = 1$  характеристики полей в угловой точке линии раздела конечны и вообще отличны от нуля.

Таким образом, исследование поведения характеристик полей в угловой точке линии раздела поперечного сечения составного цилиндрически анизотропного тела приводится к отысканию корня трансцендентного уравнения (10) с наименьшей положительной действительной частью в зависимости от параметров  $\chi, \sigma_k, \theta_1$ .

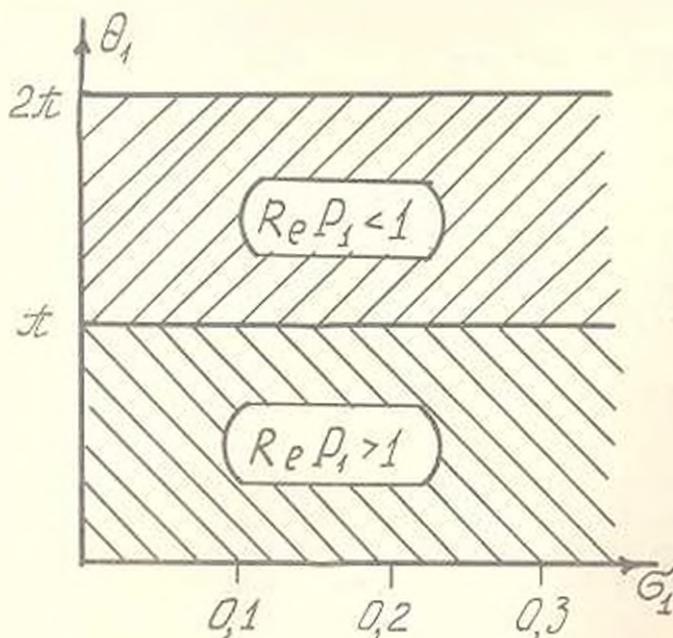
Уравнение (10) имеет сложную структуру, поэтому исчерпывающее наглядное общее исследование зависимости искомого корня  $P_1$  от параметров задачи, как это было сделано в работах [1-4], здесь невозможно.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Материалы кусочно-однородного тела изотропны, то есть  $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = 0$ . В этом случае вместо уравнения (10) будем иметь

$$\sin^2(\pi p) = \frac{(1 - \chi_0)^2}{(1 + \chi_0)^2} \sin^2(\pi - \theta_1) p \quad (14)$$

где  $\chi_0 = a_{11}^{(2)} / a_{11}^{(1)}$ . Здесь и далее учтено замечание Фойгта относительно



фиг. 2

Таблица 1

$\sigma_1 \backslash \theta_1$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$2\pi$
$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = 0.3$	0.954	0.974	0.990	1.000	1.005	1.005	1.000
$\sigma_1 = 0.1$ $\sigma_2 = 0.3$	0.954	0.972	0.977	0.985	0.991	0.994	0.995
$\sigma_1 = 0.2$ $\sigma_2 = 0.3$	0.954	0.960	0.965	0.969	0.975	0.977	0.980
$\sigma_1 = 0.3$ $\sigma_2 = 0.3$	0.954	0.954	0.954	0.954	0.954	0.954	0.954

равенства упругих постоянных  $\nu_{11}^{(1)}$ ,  $\nu_{22}^{(2)}$  [5].

Уравнение (14) получено в работе [1], где было показано, что действительный корень  $p_1$  всегда находится в интервале  $0 < p_1 < 1$ , то есть в угловой точке линии раздела стремление характеристик полей к бесконечности неизбежно.

2. В случае  $\chi = 1$  из уравнения (10) следует

$$sh^2 \frac{(\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2)}{2} p + \sin^2 \frac{(\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2)}{2} p = 0 \quad (15)$$

откуда для действительной части  $p_1$  получим

$$\operatorname{Re} p_1 = \frac{2\pi(\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2)}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1 \theta_2 (\sigma_1 \sigma_2 + \tau_1 \tau_2)}$$

$$\tau_1 = \sqrt{1 - \sigma_1^2} \quad \tau_2 = \sqrt{1 - \sigma_2^2} \quad (16)$$

Из (16) непосредственно следует, что при  $\sigma_2 = \sigma_1$ , то есть для однородного цилиндрически анизотропного тела,  $\operatorname{Re} p_1 = \tau_1 < 1$ .

Следовательно, в окрестности оси анизотропии однородного цилиндрически анизотропного тела характеристики полей всегда стремятся к бесконечности. Принимая, что один из материалов составного тела является изотропным  $\sigma_2 = 0$ , из (16) для всех допустимых значений  $\sigma_1$  получим результат, приведенный на фиг. 2.

В табл. 1 приведены некоторые эти и другие значения действительной части  $p_1$  в зависимости от угла  $\theta_1$  при различных значениях  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ .

3. В другом частном случае, когда  $\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2 = 0$ , что возможно, если  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  имеют разные знаки [7] вместо (10) имеем уравнение

$$\sin^2(\pi p^*) = \frac{(1 - \chi)^2}{(1 + \chi)^2} \sin^2(\pi - \theta_1^*) p^* \quad (17)$$

Как и в случае (14), уравнение (17) в интервале  $0 < p^* < 1$  всегда имеет действительный корень  $p_1^*$ . Следовательно, подбором геометрических и физических параметров задачи имеется возможность регулировать поведение характеристик полей в нужном направлении, что следует из формул (12). Табл. 2 содержит часть вычисленных значений  $p_1$  в зависимости от  $\chi$  при  $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ .

Таблица 2

$\sigma_1 \backslash \chi$	1	1.5	2	5	10	20	50
$\sigma_1 = 0.4$ $\sigma_2 = -0.2$	1.043	0.985	0.947	0.855	0.815	0.791	0.777
$\sigma_1 = 0.2$ $\sigma_2 = -0.4$	1.066	1.013	0.979	0.897	0.861	0.841	0.828

Анализ данных, приведенных на фиг.2 и в табл. 1,2 показывает, что в окрестности угловой точки линии раздела областей поперечного сечения кусочно-однородного цилиндрически анизотропного тела характеристики полей в зависимости от физических и геометрических параметров составного тела могут стремиться к нулю, иметь особенность или конечное значение.

На эти результаты следует, по-видимому, обратить внимание при исследовании причин возникновения известных аномалий геофизических полей океанического дна [8,9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих средах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
2. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. - Докл. АН АрмССР, т.36,4, 1988, с.161-165.
3. Саргсян А.М. Поведение плоских стационарных физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного цилиндрически анизотропного клина. В со. - Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН РА, в печати.
4. Sinclair G.V. On the singular Eigenfunction for Plane Harmonic Problem in Composite Regions. - Journ. of Appl. Mech., 1980, v.47, N 1, p. 87-92.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. 416 с.
6. Саркисян В.С., Белубекян В.М. Об одной антиплоской задаче для клина. - Уч. зап. ски ЕрГУ, 3, 1986, с.36-40.
7. Сендецкий Дж. Механика композиционных материалов. Т.2. - М.: Мир, 1978. 364 с.
8. Геофизика океана. Т. 1. Геофизика океанического дна. - М.: Наука, 1979. 470 с.
9. Уэда Сеия. Новый взгляд на Землю. - М.: Мир, 1980. 214 с.

Институт механики АН Армении  
Поступила в редакцию 28.06.1991