ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44, № 5, 1991 Механика

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ТРЕЩИНЫ В СОСТАВНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.

Բագդոև Ա.Գ., Մովսիսյան Լ.Ա. Բաղադրյալ անիզոտրոպ տարածությունում ճաքի տարածման մասին

Bagdoev A.G., Movsisian L.A. About crack propagation in compound anisotropic space

Դիտարկված է տարբեր առաձգական հատկություններով երկու անիզոտրոպ կիսատարածություններից բաղկացած տարածությունում, ճաքի տարածման հակահարթ խնդիրը։ Խնդիրը լուծվում է Վիներ–Հոպֆի մեթոդով։ Ճաքի եզրերում որոշվում է լարումների ինտենսիվության գործակիցը և հարաբերական տեղափոխությունները։

Изучается антиплоская задача о распространении трещины в пространстве, состоящем из двух полупространств с различными анизотропными упругими свойствами. Задача решается методом Винера–Хопфа. Определяется коэффициент интенсивности напряжений и относительные перемещения у берегов трещины.

Изучается антиплоская задача о распространении трещины в пространстве, состоящем из двух полупространств с различными анизотропными упругими свойствами. Аналогичная задача для однородной среды (анизотропной) рассматривалась в [1]. В [2] изучалось распространение трещины в вязкоупругом составном пространстве (изотропном).

1. Пусть при $t = 0$ в полуплоскостях (xy), представляющих границы трещины, начинает действовать постоянное сдвиговое напряжение T, которое вызывает раскрытие и распространение трещины с постоянной скоростью c.

Уравнения движения для компонент перемещений, перпендикулярных к плоскости (xy), запишутся [1]

$$a_1^{(i)2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+2a_{12}^{(i)2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\,\partial y}+a_2^{(i)2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\tau_{xz}^{(i)}=a_{44}^{(i)2}\frac{\partial u_i}{\partial x}+a_{45}^{(i)2}\frac{\partial u_i}{\partial y}$$

$$\tau_{yz}^{(i)2}=a_{45}^{(i)2}\frac{\partial u_i}{\partial x}+a_{55}^{(i)2}\frac{\partial u_i}{\partial y} \qquad (1.1)$$

$$a_1^{(i)2}=\frac{a_{44}^{(i)}}{\rho_i},\quad a_2^{(i)2}=\frac{a_{55}^{(i)}}{\rho_i}$$

$$a_{12}^{(i)2} = \frac{a_{45}^{(i)}}{\rho_i},$$

Тогда граничные условия на $y = 0$ будут иметь вид:

$$\tau_{yz}^{(i)} = TH(ct - x)\, H(t), \qquad x \leq ct \tag{1.2}$$

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \qquad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, \qquad x > ct.$$

Введем новую переменную $\xi = x - ct$ и сделаем преобразования Лапласа и Фурье по t и ξ

$$\bar{\bar{u}}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} u_i \exp\left[- s\left(t + \lambda\xi + \alpha_i y\right)\right] dt\, d\xi \tag{1.3}$$

Тогда из (1.1) и (1.2) можно получить

$$\bar{\bar{\tau}}_{yz} = \left(a_{12}^{(i)2}\lambda + \alpha_i a_2^{(i)2}\right) s u_i$$

$$= \frac{T}{s^2 \rho_i}\left(\frac{1}{\lambda} + T_+(\lambda)\right)$$

$$\bar{\bar{u}}_1 - u_{1-} s^{-3} = \bar{\bar{u}}_2 - u_{2-} s^{-3} \tag{1.4}$$

где $T_+(\lambda)$ и u_{i-} - преобразования от $\tau_{yz}(x, 0, t)$ и $u_i(x, 0, t)$ соответственно на правой и левой осях ξ и аналитичные в правой и левой полуплоскостях λ

$$\alpha_i = \frac{1}{a_2^{(i)2}}\left[- a_{12}^{(i)2}\lambda + \sqrt{a_{12}^{(i)2}(1 - \lambda c)^2 - a^{(i)2}\lambda^2}\,\right]$$

$$a^{(i)2} = a_1^{(i)2} a_2^{(i)2} - a_{12}^{(i)4} \tag{1.5}$$

Систему (1.4) можно записать в виде

$$\Delta u_- = T\left(\frac{1}{\lambda} + T_+(\lambda)\right) K$$

$$K = K_+ K_- = \frac{\rho_2\gamma_2 - \rho_1\gamma_1}{\rho_2\gamma_2\rho_1\gamma_1}$$

$$\gamma_i = \sqrt{a_2^{(i)2}(1 - \lambda c)^2 - a^{(i)2}\lambda^2}$$

$$\Delta u_- = s^3(\bar{\bar{u}}_1 - \bar{\bar{u}}_2) \tag{1.6}$$

Решая (1.6) методом Винера-Хопфа, можно получить

$$T_+(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{K_+(0)}{K_-(\lambda)}\right) \tag{1.7}$$

Для определения $K_\pm$ представим K в виде

$$K = \frac{1-\xi}{\rho_1 \gamma_1} L(\lambda) = \frac{1-\xi}{\rho_1 \gamma_{1-} \gamma_{1+}} L_+ L_-$$

$$\xi = \frac{\rho_1 \gamma_1(\infty)}{\rho_2 \gamma_2(\infty)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{a_2^{(1)2} c^2 - a^{(1)2}}{a_2^{(2)2} c^2 - a^{(2)2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_\pm(\lambda) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp id}^{\infty \mp id} \frac{\ln L(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right] \tag{1.8}$$

Для вычисления последнего интеграла, принимая $a_2^{(2)} > a_2^{(1)}$, проведя разрезы в комплексной плоскости λ от $-a_2^{(2)}$ до $-a_2^{(1)}$ и от $a_2^{(1)}$ до $a_2^{(2)}$ и воспользовавшись представлением

$$\gamma_{i+} \gamma_{i-} = \sqrt{[a_2^{(i)} + \lambda(a^{(i)} - a_2^{(i)} c)][a_2^{(i)} - \lambda(a^{(i)} + a_2^{(i)} c)]}$$

можно получить [3]

$$L_+(\lambda) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_{b_2}^{b_1} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{X_1}{X_2}} \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \right] \tag{1.9}$$

где для $i = 1, 2$,

$$X_i = \left[(\lambda' c - 1) a_2^{(i)} \right]^2 - \left(\lambda' a_2^{(i)} \right)^2$$

$$K_+(\lambda) = L_+(\lambda) \frac{\sqrt{1-\xi}}{\rho_1 \gamma_{1+}} \qquad b_i = -\frac{a_2^{(i)}}{a^{(i)} - a_2^{(i)} c}$$

$$\gamma_{1+} = \sqrt{a_2^{(1)} + \lambda(a^{(1)} - a_2^{(1)} c)} \tag{1.10}$$

Подставляя (1.4) в (1.7), получим

$$\tau_{yz} = \frac{T}{\lambda s^2} \frac{K_+(0)}{K_+(\lambda)} \tag{1.11}$$

Представляет интерес значение τ_{yz} в точке $\xi = +0$ $(\lambda \to \infty)$, которое дает величину коэффициента интенсивности напряжений

$$\tau_{yz}(\lambda \to \infty) = \frac{T}{\sqrt{\lambda b_1}\, s^2} L_+(0) \tag{1.12}$$

Используя обратное преобразование Фурье [4]

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\xi}\ \Gamma(1/2)}, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{s\lambda}} \tag{1.13}$$

можно получить

$$\tau_{yz}(\xi \to 0, 0, t) = \frac{L_+(0)\, T\sqrt{t}}{\sqrt{\xi}\ \Gamma(1/2)\,\Gamma(3/2)} \frac{\sqrt{a^{(1)} - a_2^{(1)} c}}{\sqrt{a_2^{(1)}}} \tag{1.14}$$

2. Для определения Δu_-, из (1.6) имеем

$$\Delta u_- = \frac{T}{\lambda} K_+(0)\ K_-(\lambda) \tag{2.1}$$

Тогда

$$\delta \bar{\bar{u}} = \bar{\bar{u}}_1 - \bar{\bar{u}}_2 = - \frac{T}{\rho_1 s^3 \sqrt{(-\lambda)^3}}$$

$$\times \frac{(1-\zeta)\, L_+(0)\, L_-(\lambda)}{\gamma_{1+}(0)\,[a^{(1)} - a_2^{(1)} c]^{1/2}} \tag{2.2}$$

Величина обратного преобразования Фурье этой разности при $\xi = 0$ будет ($L(\infty) = 1$)

$$\delta \bar{u} = \frac{2T\sqrt{-\xi}}{\rho_1 s^{3/2}\ \Gamma(1/2)} \ \frac{(1-\zeta)\, L_+(0)}{\gamma_{1+}(0)\ [a^{(1)} - a_2^{(1)} c]^{1/2}} \tag{2.3}$$

Оттуда для разности перемещений получится

$$u_1(\xi \to -0, 0, t) - u_2(\xi \to -0, 0, t) = \frac{2T(-\xi t)^{1/2}}{\rho_1 \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}$$

$$\times \frac{(1-\zeta)\, L_+(0)}{[a_2^{(1)}(a^{(1)} - a_2^{(1)} c)]^{1/2}} \tag{2.4}$$

3. Для получения условия распространения первоначально неподвижной трещины воспользуемся условием Ирвина [5]. Поэтому вычислим энергию на единицу длины по ξ на продолжении трещины

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}\Big|_{y=0} \geq 2\sigma \tag{3.1}$$

где σ -энергия разрушения.

$$\Delta U \mid_{y=0} = \int_0^{\Delta x} \tau_{yz}(y=0)(u_1 - u_2)_{\xi \to \xi - \Delta x} d\xi \tag{3.2}$$

Подставляя (1.14) и (2.4) в (3.2), получим

$$\frac{T^2 i L_+^2(0)(1-\xi)}{\rho_1 \pi^2 a_2^{(1)}} \geq \sigma \tag{3.3}$$

Из (3.3) и (1.9) при $c = 0$ получится условие возникновения трещины. Интересно отметить, что для однородной среды $\xi = 1$ (3.3) вырождается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины. -Механика, межвуз. сб. н.тр., вып.7, 1989, с.48-56.*
2. *Coussy O. A moving Crack Problem Along the Interface of the Viscoelastic Media.- Int. J. Engng. Sci., vol. 25, 1987, 5, pp. 609-620.*
3. *Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. -М.: Изд.-во иностр. лит., 1962. 279 с.*
4. *Бейтмен Г. и Эрдейи П. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. , -М.: Наука, 1969. 343 с.*
5. *Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. -М.: Наука, 1970. 568 с.*

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию 24.12.1990