

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ
НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

САРУХАՆՅԱՆ Ա.Ա.

Սարուխանյան Ա.Ա. Ոչ ստացիոնար տուրբուլենտ շարժումը հարթ զլանական խողովակում

Ծննդով տուրբուլենտ լարումների վերաբերյալ Բուսինսկիի հիպոթեզից ստացված է ոչ ստացիոնար շարժման հավասարումը հարթ զլանական խողովակում:

Исходя из гипотезы Буссинеска о турбулентной напряженности, получено уравнение нестационарного турбулентного движения в плоской цилиндрической трубе.

Saruchanyan A.A. Nonstationary turbulent plane flow

В стационарном турбулентном потоке, по простейшей гипотезе Буссинеска, турбулентное напряжение τ между двумя плоскими параллельными стенками определяется зависимостью

$$\tau = -\rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (1)$$

где ϵ - кинематический коэффициент турбулентной вязкости, зависящий от координат; $\bar{u}$ - усредненная по времени скорость; y - расстояние от неподвижной плоской стенки.

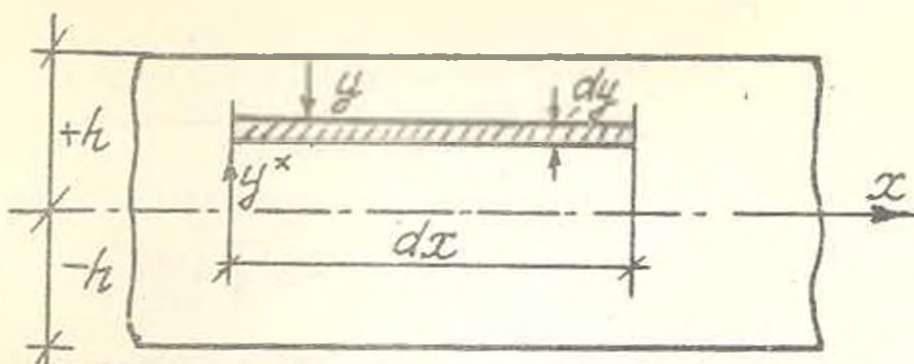
Зависимость $\epsilon = \epsilon(y)$ даст достаточно точное соответствие теоретических и экспериментальных данных в плоскопараллельном потоке. Линейная зависимость кинематического коэффициента турбулентной вязкости от координаты y приводит к логарифмическому закону распределения усредненных скоростей по живому сечению потока.

Для нестационарного турбулентного потока отсутствуют сведения о нестационарном турбулентном напряжении. Поэтому для составления математической модели нестационарного турбулентного потока, в порядке первого приближения, воспользуемся зависимостями, полученными для стационарных турбулентных потоков. В частности, будем предполагать, что кинематический коэффициент турбулентной вязкости имеет линейную зависимость от координат, то есть

$$\epsilon = \mu y \quad (2)$$

Рассмотрим нестационарное турбулентное движение между двумя параллельными неподвижными плоскими стенками, расположенными на расстоянии $2h$. Начало координат поместим в середине между стенками (фиг.1). Для несжимаемой жидкости, при пренебрежении массовых сил, система уравнений движения будет

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$



Фиг.1

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Из последних двух уравнений следует, что давление не зависит от переменных y и z . Это возможно только в том случае, если перепад давления по течению будет функцией только от времени, то есть

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(t) \quad (4)$$

Таким образом, задача исследования плоскопараллельного напорного турбулентного движения несжимаемой жидкости сводится к решению дифференциального уравнения в виде [1,4,5]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = f(t) + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

Для решения уравнений (5) задаются начальные и граничные условия:

$$\bar{u}(y, t) = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\bar{u}(y, t) = \Phi(y) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (0 < y < 2h) \quad (7)$$

где $\Phi(y)$ — некоторая заданная функция, определяемая начальным распределением скоростей по живому сечению потока.

Решение уравнения (5) ищем в виде суммы [2,4]:

$$\bar{u}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) J_0 \left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}} \right) \quad (8)$$

где $J_0 \left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}} \right)$ функция Бесселя первого рода нулевого порядка; λ_k — собственные числа задачи; $C_k(t)$ некоторая функция, зависящая от времени t .

Собственные числа определяем из условия, что в центре канала имеем максимум, то есть $\left. \frac{\partial \bar{u}(y, t)}{\partial y} \right|_{y=h} = 0$, тогда из (8) получим, что

$$J_1(\lambda_k) = 0 \quad (9)$$

Уравнение (5) с учетом (8) примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dC_k(t)}{dt} J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) \\ = f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \frac{\lambda_k^2}{4h} J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Сложность задачи заключается в том, что функция $f(t)$ не разлагается в ряды Фурье-Бесселя по собственным функциям задачи, т.к. собственные числа являются корнями уравнения (9) и коэффициенты разложения не определяются в окончательном виде. Поэтому функцию $f(t)$ представим в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) \quad (11)$$

где $J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right)$ -бесселева функция первого рода, второго порядка; a_k - коэффициенты разложения.

Для определения неизвестных коэффициентов a_k обе части равенства (11) умножим на $J_2\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy$ и проинтегрируем от 0 до h , получим

$$\begin{aligned} \int_0^h f(t) J_2\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy \\ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^h J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) J_2\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy \end{aligned} \quad (12)$$

При произвольном λ_m и λ_k значения интеграла будут:

$$\int_0^h J_2\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy = 0 \quad \text{при } k \neq m, \quad (13)$$

$$\int_0^h J_2^2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy = h J_0^2(\lambda_k) \quad \text{при } k = m \quad (14)$$

Подставляя значения (13) и (14) в уравнение (12) для определения коэффициентов a_k получим формулу

$$a_k = \frac{f(t) \int_0^h J_0(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}) dy}{h J_0^2(\lambda_k)} \quad (15)$$

Формулу (15) можно переписать в виде

$$a_k = \frac{f(t)}{J_0^2(\lambda_k)} \int_0^h \sqrt{\frac{y}{h}} J_2(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}) d\sqrt{\frac{y}{h}} \quad (16)$$

Последний интеграл легко интегрируется и представляется в виде суммы. Уравнение (10) с учетом (11) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{dC_k(t)}{dt} J_0(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) J_2(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}) - \sum_{k=1}^{\infty} n C_k(t) \frac{\lambda_k^2}{4h} J_0(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}) \quad (17)$$

Для интегрирования уравнения (17) используем асимптотическое разложение функций Бесселя [4].

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (18)$$

Имея в виду (18), для определения коэффициентов $C_k(t)$ получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dC_k(t)}{dt} = a_k - n \frac{\lambda_k^2}{4h} C_k(t) \quad (19)$$

Решение соответствующего однородного уравнения будет

$$C_k(t) = C_k \exp\left(-\frac{n\lambda_k^2}{4h} t\right) \quad (20)$$

Общее решение неоднородного уравнения (19) имеет вид (2)

$$C_k(t) = \left[C_k + \frac{2A_0}{J_0^2(\lambda_k)} \{ F(t) - F(0) \} \right] \exp\left(-\frac{n\lambda_k^2}{4h} t\right) \quad (21)$$

где

$$F(t) = \int f(t) \exp\left(\frac{n\lambda_k^2}{4h} t\right) dt$$

$$A_0 = \int_0^h \sqrt{\frac{y}{h}} J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) d\sqrt{\frac{y}{h}}$$

Таким образом, общее решение задачи с учетом (21) и (8) будет

$$\bar{w}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k + \frac{2A_0}{J_0^2(\lambda_k)} [F(t) - F(0)] \right] \times \exp\left(-\frac{\pi \lambda_k^2}{4h} t\right) J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) \quad (22)$$

Для определения неизвестных коэффициентов C_k воспользуемся начальным условием (7)

$$\Phi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right)$$

Из выражения (23) следует, что коэффициенты C_k являются коэффициентами разложения функции $\Phi(y)$ по собственным функциям. Обе части равенства (23) умножим на $J_0\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy$ и проинтегрируем от 0 до h . Имея в виду, что

$$\int_0^h J_0\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq m \\ h J_0^2(\lambda_k), & \text{при } k = m \end{cases} \quad (24)$$

получим

$$C_k = \frac{1}{h J_0^2(\lambda_k)} \int_0^h \Phi(y) J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy$$

Исходя из общего решения задачи (22), легко можно получить решение любых практических задач. По краевым условиям задачи определятся коэффициенты C_k , A_k и закон распределения скоростей по живому сечению потока, что дает возможность вычислить коэффициент количества движения и потерь напора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. - М.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. 576 с.
3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955. 519 с.
4. Кузьмин Р.О. Бесселевы функции. - М.-Л.: ОНТИ, 1935. 244 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. 711 с.

Ереванский политехнический институт
Поступила в редакцию 3.04.1990