

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА-ВРАЩЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ  
КОНТИНУУМЕ КОССЕРА

ЕРОФЕЕВ В.И.

Օրոֆեսս վ.ի. Սահք-պտույտի ստացիոնար ալիքները Վասսերայի ոչ գծային հոծ միջավայրում  
Ուսումնասիրվում են սահքի-պտույտի ոչ գծային ալիքները միկրոկառուց-  
վածքով միջավայրում: Գիտարկված են ալիքների հարթ և շրջանային  
բևեռացման դեպքերը: Կառուցված են հաստատված ալիքների արագու-  
թյունների կախումը դրանց լայնույթներից:

Изучается новый тип стационарных волн - нелинейные волны сдвига-вращения  
в среде с микроструктурой. Рассмотрены случаи плоской и циркулярной поляризации  
волн. Построены зависимости скорости стационарных волн от их амплитуд.

Erofeyev V.I. Stationary Shear-Rotatory Waves in a Cosserat Nonlinear Continuum

Неклассическая модель сплошной среды, в которой структурные эле-  
менты обладают свойствами твердого тела, была предложена Е. и Ф.Кос-  
сера в 1909 г. [1]. В настоящее время эта модель используется при  
описании высококачественных процессов в поликристаллических ма-  
териалах и композитах [2,3]. Кроме "классических" типов упругих волн  
- продольных и сдвиговых, модель континуума Коссера позволяет описать  
новые типы волн - продольного вращения и поперечного вращения [2].  
Продольные волны и волны продольного вращения связаны за счет  
квадратичной нелинейности. Особенности нелинейных взаимодействий  
этих типов волн изучались в работах [4-7].

Сдвиговые волны и волны поперечного вращения связаны в линейном  
приближении [2], образуя волны сдвига-вращения. В работе [8] изуча-  
лась самомодуляция квазигармонической волны сдвига-вращения.

В настоящей работе проанализированы стационарные волны сдвига-  
вращения.

1. Уравнения динамики. Распространение плоских волн сдвига-  
вращения в нелинейном континууме Коссера описывается уравнениями

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \frac{c_2^2}{c_1} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \xi} = - \frac{c_1^2}{4c_1} \frac{\partial}{\partial \xi} (|\vec{U}|^2 \vec{U}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial \xi^2} - \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2c_1} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial \xi^2} - \frac{2a}{Jc_1} (\vec{\Psi} + \vec{U}) = 0 \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1), (1.2) записаны в системе координат  $(\tau, \xi)$ , движу-

шейся со скоростью сдвиговых волн ( $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ,  $\xi = x - c_T t$ ,  $t = t$ )

Через  $\vec{U}$  обозначен вектор сдвиговых деформаций  $\vec{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  - вектор

перемещений;  $\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$  - вектор поворота;  $c_L = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}$  - скорость про-

дольной волны;  $c_1 = \sqrt{\frac{(\gamma + \varepsilon)}{J}}$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}$  - характерные скорости волны вращения;  $\lambda, \mu$  - константы Ламе;  $\alpha, \gamma, \varepsilon$  - упругие константы микровращения;  $\rho$  - плотность;  $J$  - константа, характеризующая инерционные свойства макрообъема.

Заметим, что в (1.1), (1.2) учтена только геометрическая нелинейность. Учет физической нелинейности не принесет, в данном случае, новых эффектов, а лишь существенно усложнит анализ. Это связано с тем, что появятся дополнительные упругие модули и дополнительные модули микрополярной среды, информация о численных значениях которых в литературе отсутствует [9].

Известно [10], что в различных средах в результате "конкуренции" эффектов нелинейности и дисперсии могут образовываться стационарные волны, то есть волны, распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения формы.

Покажем, что в изучаемой микрополярной среде могут распространяться нелинейные стационарные волны сдвига-вращения. Для этого будем искать решение (1.1), (1.2) в виде  $\vec{U} = \vec{U}(\eta)$ ,  $\vec{\Psi} = \vec{\Psi}(\eta)$ ,  $\eta = \xi - Vt$ ,  $V = const$  - скорость стационарной волны. Уравнение (1.1) дает связь между сдвиговой деформацией и вращением

$$\vec{\Psi} = \frac{c_T^2}{4c_L^2} |V|^2 \vec{U} - \frac{V c_T}{c_L^2} \vec{U} + \Psi_0 \quad (1.3)$$

где  $\Psi_0$  - постоянная интегрирования, которая без нарушения общности может быть положена равной нулю (пренебрегаем вращением макрообъема как жесткого целого).

Скорость стационарной волны ( $V$ ) является произвольным параметром задачи. Если она удовлетворяет условию

$$V \gg \frac{c_T^2}{c_L} \quad (1.4)$$

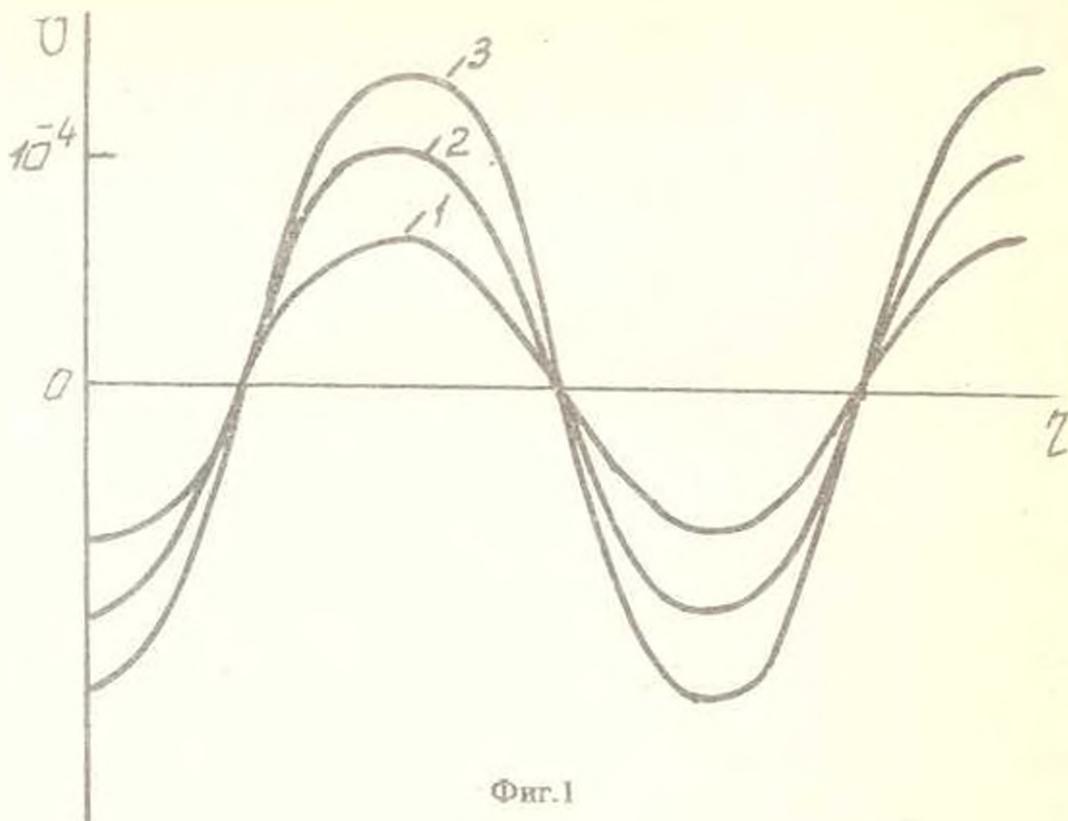
то уравнение (1.2) можно привести к виду:

$$\frac{d^2 \vec{\Psi}}{d\eta^2} + a \vec{\Psi} = 0 \quad (1.5)$$

где

$$a = \frac{4\alpha}{J(2c_T V + c_T^2 - c_L^2)}$$

Соотношения (1.3), (1.5) получены для плоских волн произвольной



Фиг. 1

поляризации. Рассмотрим случай, когда волны сдвига-вращения являются плоско-поляризованными и циркулярно-поляризованными.

2. Плоско-поляризованные волны. Для плоско-поляризованных волн  $\vec{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$  и соотношения (1.3), (1.5) становятся скалярными.

Если  $\frac{a}{j} > 0$  и скорость стационарной волны ( $V$ ) удовлетворяет неравенству ("быстрая" волна):

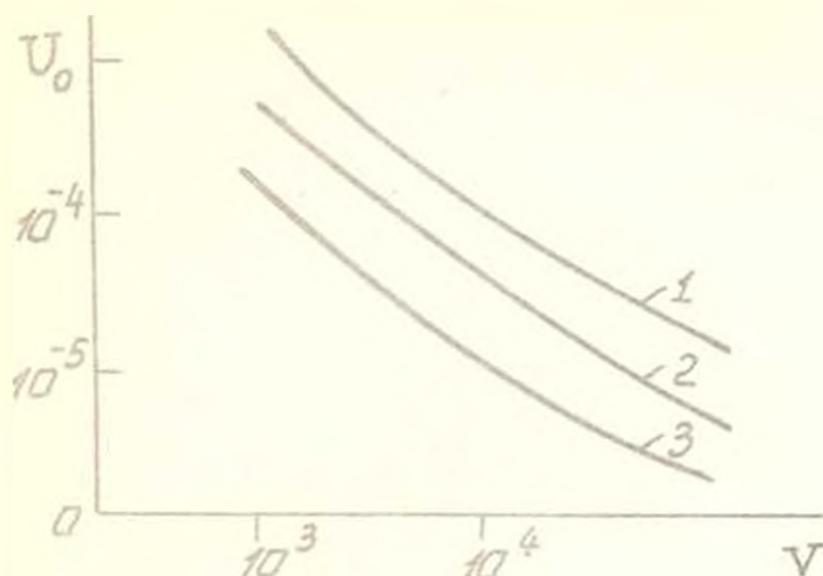
$$V > \frac{c_1^2 - c_2^2}{2c_1} \quad (2.1)$$

то волна вращения является гармонической. Функция  $\Psi_3(\eta)$  находится в этом случае из уравнения осциллятора ( $a > 0$ )

$$\frac{d^2 \Psi_3}{d\eta^2} + a \Psi_3 = 0 \quad (2.2)$$

Профиль нелинейной волны деформации рассчитывается по алгебраическому уравнению

$$U^3 - \frac{4Vc_1}{c_1^2} U = \frac{4c_2^2}{c_1^2} A \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} \eta + \theta_0\right) \quad (2.3)$$



Фиг.2

Здесь  $A$  - амплитуда, а  $\Lambda$  - характерная длина волны вращения,  $\theta_0$  - начальная фаза.

Скорость стационарной волны ( $V$ ) связана с длиной волны ( $\Lambda$ ) соотношением

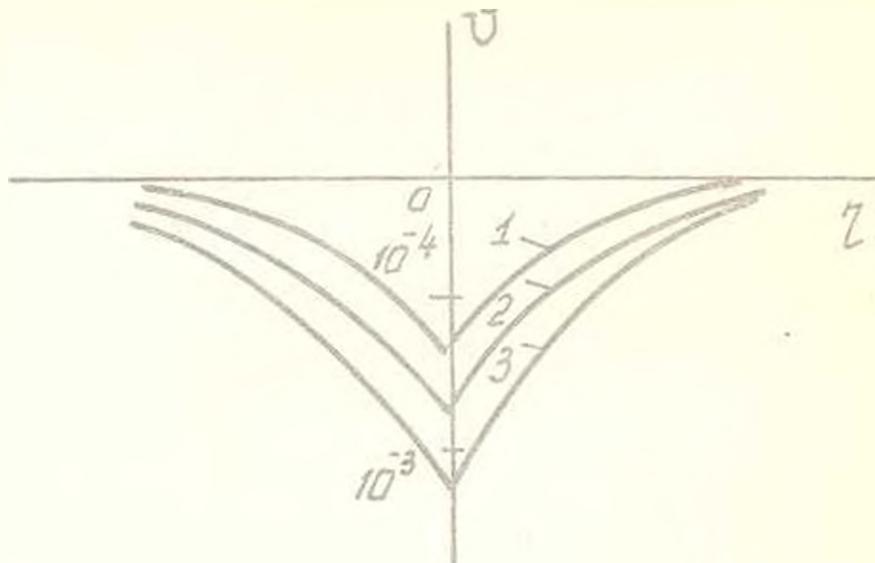
$$V = \frac{\alpha \Lambda^2}{2c_T J \alpha^2} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2c_T} \quad (2.4)$$

Легко видеть, что для любого материала, у которого  $\frac{\alpha}{J} > 0$ , неравенство (2.1) выполняется при произвольной, отличной от нуля длине волны ( $\Lambda$ ).

Рассмотрим зернистый композит - алюминиевая дробь в эпоксидной матрице. Для такого материала в работе [11] были измерены значения характерных скоростей:  $c_1 = 2.28 \cdot 10^3$  м/сек,  $c_T = 9.29 \cdot 10^2$  м/сек,  $c_2 = 2.48 \cdot 10^2$  м/сек,  $c_3 = 0.583 \cdot 10^2$  м/сек; плотность  $\rho = 2.19 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; диаметр зерна  $d = 1.4 \cdot 10^{-3}$  м и константа, характеризующая инерционные свойства макрообъема  $J = 0.429 \cdot 10^{-3}$  кг/м.

Профиль стационарной волны деформации, распространяющейся в зернистом композите, можно рассчитывать по формуле (2.3), если  $V > 2.846 \cdot 10^3$  м/сек (см. (1.4), (2.1)).

На фиг.1 показано распределение деформации  $U$  ( $\eta$ ) вдоль координаты  $\eta$  при  $\Lambda = 10^{-2}$  (кривая 1),  $\Lambda = 0.5 \cdot 10^{-1}$  (кривая 2);  $\Lambda = 10^{-1}$  (кривая 3). Расчеты производились при длине волны  $\Lambda = 1.5d$ .



Фиг.3

Нелинейные волны характеризуются, как правило, тем, что их параметры - скорость, длина волны и другие зависят от их амплитуды [10].

На фиг.2 представлена зависимость скорости стационарной волны деформации ( $V$ ) от ее амплитуды ( $U_0$ ) при  $A = 10^{-2}$ ;  $0.5 \cdot 10^{-1}$ ;  $10^{-1}$ ; (кривые 1-3).

Из фиг.2 следует, что волны сдвига-вращения большей амплитуды распространяются с меньшими скоростями. Указанное свойство существенно отличает этот тип стационарных волн от изучавшихся ранее продольных волн в среде с микроструктурой [12].

Если стационарная волна является "медленной", то есть

$$\frac{c_2^2}{c_1} \ll V < \frac{c_1^2 - c_2^2}{2c_1} \quad (2.5)$$

то функция  $\Psi_3(\eta)$  - апериодическая

$$\Psi_3 = A_1 \exp(\sqrt{-a} \eta) + A_2 \exp(-\sqrt{-a} \eta) \quad (2.6)$$

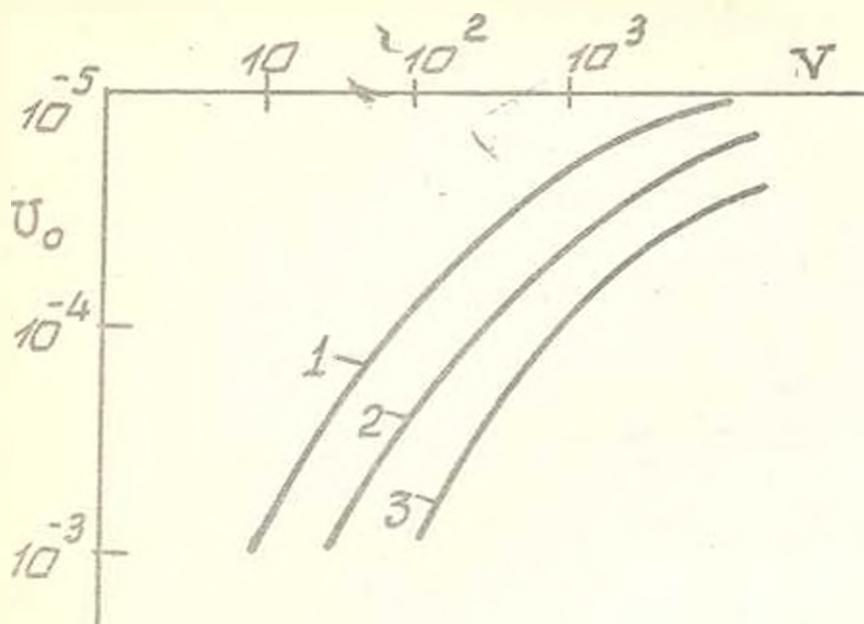
Соотношение (2.6) - это решение уравнения осциллятора (2.2) при  $a < 0$ , причем, физический смысл имеет лишь спадающая функция.

Профиль волны деформации рассчитывается по уравнению

$$U_3 - \frac{4Vc_2}{c_1^2} U = \frac{4c_2^2}{c_1^2} A \begin{cases} \exp(-\sqrt{-a} \eta); & \eta \geq 0 \\ \exp(\sqrt{-a} \eta); & \eta \leq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Для зернистого композита скорость "медленной" стационарной волны определяется неравенством

$$3.7 \text{ м/сек} \ll V < 2.85 \cdot 10^3 \text{ м/сек} \quad (2.8)$$



Фиг.4

Распределение деформации  $U(\eta)$  вдоль координаты  $\eta$  показано на фиг.3. Расчеты производились при  $A = 10^{-2}$  (кривая 1);  $A = 0.5 \times 10^{-1}$  (кривая 2);  $A = 10^{-1}$  (кривая 3);  $V = 10^2$  м /сек.

На фиг.4 приведена зависимость скорости стационарной волны ( $V$ ) от ее амплитуды  $U_0$  при  $A = 10^{-2}$ ;  $0.5 \times 10^{-2}$ ;  $10^{-1}$  (кривые 1-3).

Из фиг.4 следует, что для "медленных" стационарных волн сдвига-вращения выполняются те же закономерности, что и для "быстрых" - волны большей амплитуды распространяются с меньшими скоростями.

3. *Циркулярно-поляризованные волны.* Для волн, имеющих циркулярную поляризацию, решение уравнения (1.5) будем искать в виде

$$\vec{\Psi} = A(\eta) \vec{e} \quad (3.1)$$

где

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(\eta) \\ -\sin \varphi(\eta) \end{pmatrix} - \text{поляризационный вектор, } \varphi - \text{фаза вращения.}$$

Фаза волны выражается в этом случае через амплитуду соотношением

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{d}{A^2} \quad (3.2)$$

где  $d$  - постоянная интегрирования, а амплитуда определяется из уравнения осциллятора, содержащего нелинейность в отрицательной степени

$$\frac{d^2 A}{d\eta^2} + aA - d^2 A^{-3} = 0 \quad (3.3)$$

В работе [13] была исследована фазовая плоскость  $(A, \frac{dA}{d\eta})$  уравнения (3.3). При  $a > 0$  ("быстрые" волны) на оси абсцисс имеются два состояния равновесия, оба они устойчивые - типа "центр". Следовательно, имеются замкнутые фазовые траектории. В системе могут наблюдаться периодические движения. При  $a < 0$  ("медленные" волны) замкнутые фазовые траектории отсутствуют.

Уравнение (3.3) имеет и аналитические решения. Легко видеть, что (3.3) сводится к уравнению первого порядка (первый интеграл), которое интегрируется методом разделения переменных

$$\eta = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dA^2}{\sqrt{-aA^4 + cA^2 - d^2}} \quad (3.4)$$

где  $c$  - еще одна постоянная интегрирования.

Для некоторых случаев удастся записать решение в явном виде.

При  $a > 0$  ("быстрые" волны) у уравнения (3.3) имеется следующее периодическое решение:

$$A = \pm \sqrt{\frac{c}{2a} + \frac{\sqrt{(c^2 - 4ad^2)}}{2a} \sin 2\sqrt{a}\eta} \quad (3.5)$$

которое справедливо при  $c^2 > 4ad^2$ ,  $| -2aA^2 + c | < \sqrt{c^2 - 4ad^2}$ .

Если  $a < 0$  ("медленные" волны), то решение уравнения (3.3) имеет вид

$$| 2\sqrt{-a(aA^4 + cA^2 - d^2)} - 2aA^2 + c | = \exp(2\sqrt{-a}\eta) \quad (3.6)$$

Вводя те или иные условия на параметры, можно привести (3.6) к более простому виду. Однако, как и для "медленных" волн с плоской поляризацией, физический смысл имеют лишь спадающие функции. Такое решение можно получить, если в (3.6)  $-2aA^2 + c < 0$ .

Это решение запишется в виде

$$A = \pm \sqrt{\frac{c}{2a} - \frac{1}{2a} \exp(-2\sqrt{-a}\eta)} \quad (3.7)$$

Профиль циркулярно-поляризованной (спиральной) волны деформации рассчитывается по уравнению

$$|U|^2 \vec{U} - \frac{4Vc_1}{c_1^2} \vec{U} = \frac{4c_1^2}{c_1^2} A \begin{pmatrix} \cos \varphi(\eta) \\ -\sin \varphi(\eta) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

в котором фаза вращения  $\varphi$  определяется соотношением (3.2). Амплитуда  $A$  для "быстрой" волны описывается выражением (3.5), для "медленной" волны - выражением (3.8).

В заключение заметим, что описанные в публикуемой статье стационарные волны сдвига-вращения являются новым, не наблюдавшимся ранее, типом нелинейных стационарных волн. Эти волны ждут еще своего экспериментального обнаружения.

Автор благодарит В.В. Кажасва за помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables. - Herman. Paris. 1909. 126 p.
2. Эриген А. Теория микрополярной упругости. Разрушение. - М.: Мир. 1975. Т.2. С.646-751.
3. Новаккин В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Структурно-феноменологические модели в задачах нелинейной динамики поликристаллических и композиционных материалов. Матем. модел. в технологии машиностр. - Свердловск: УРО АН СССР, 1989. С.117-126.
5. Ерофеев В.И., Потапов А.И. О некоторых волновых эффектах в нелинейно-упругих микрополярных средах. - Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990, т.43, 3, с.55-60.
6. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные резонансные взаимодействия упругих волн. Пробл. динамики взаимодействия деформируемых сред. - Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1990. С.124-128.
7. Erofeyev V.I., Potapov A.I. Nonlinear wave processes in elastic media with inner structure - Nonlinear world. - World Scientific. Singapore - New Jersey - London - Hong Kong. 1990. V.2. P.1197-1215.
8. Ерофеев В.И. Модуляционная неустойчивость упругих волн сдвига-вращения. Волновые задачи механики. - Горький: ГФ ИМАШ, АН СССР, 1990. С.95-98.
9. Erbay S., Suhubi E.S. Nonlinear wave propagation in micropolar media. Part 1,2 - Int.J. Engng. Sci. 1989, v.27, 8, p.895-914. P.915-919.
10. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973. 176с.
11. Gauthier R. D., Jashman W. E. A quiz for micropolar elastic constants - Arch. mech. 1981. V.33. V.5. P.717-737.
12. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментами напряжений. - Акуст. журн. 1991. Т.37.
13. Ерофеев В.И., Кажасв В.В., Потапов А.И. Исследование динамической системы второго порядка, содержащей нелинейность в отрицательной степени. - Дифф. и интегр. уравнения: - Межвуз. сб. - Горьк. ун-т, 1986, с.32-36.

Нижегородский филиал Института машиноведения АН России  
Поступила в редакцию 18.01.1991