

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ,
ОСЛАБЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

СТЕПАНЯН С.П., АФЯН Б.А.

Ստեփանյան Ս.Պ., Աֆյան Բ.Ա. Մաքուրի համակարգով բաղադրված կիսահարթության համար առաձգականության առկայության հարթ խնդիրը Գիտարկվում է վերջավոր և երեք կիսանվերջ ճաշերով բաղադրված կիսահարթության համար լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի խնդիրը: Վերջավոր և երկու կիսանվերջ ճաշերը, որոնք սիմետրիկ են երրորդի նկատմամբ, գտնվում են կիսահարթության եզրին զուգահեռ մեկ ուղղի վրա: Ուղղահայտ կիսանվերջ ճաշի զազաթը գտնվում է ճորիզմակամ ճաշերի զազաթության գծից որոշ հեռավորության վրա:

Рассмотрена задача о плоско-деформированном состоянии полуплоскости, ослабленной конечной и тремя полубесконечными трещинами. Конечная и две горизонтальные полубесконечные трещины расположены симметрично относительно трещины, находящейся на одной линии, параллельной границе полуплоскости. Вершина вертикальной полубесконечной трещины находится на некотором расстоянии от линии расположения горизонтальных трещин

Stepanian S.P., Afyan B.A. The plane problem of elasticity for a weakened by crack system half-plane

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии полуплоскости, ослабленной конечной и тремя полубесконечными трещинами. Отметим, что конечная и две горизонтальные полубесконечные трещины, которые расположены симметрично относительно третьей, находятся на одной линии, параллельной границе полуплоскости. Вершина вертикальной полубесконечной трещины находится на расстоянии H от границы полуплоскости, а остальные трещины удалены на расстоянии h ($h < H$).

Полуплоскость находится под действием самоуравновешенных нагрузок, приложенных на берегах трещин, т.е. есть

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= p_0(x) \quad , \quad \tau_{xy}(x, 0) = q_0(x) \\ & (|x| < a \quad , \quad |x| > b \quad , \quad a < b) \\ \sigma_{xx}(0, y) &= \sigma_0(y) \quad , \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \\ & (y > c) \\ u(x, -h) &= v(x, -h) = 0 \quad , \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \tag{1}$$

Задача решается методом разделения основной области на подобласти

прямыми, содержащими трещины. Используя симметрию, решение строится для одной полуполосы в одной четверть-плоскости.

Полагая, что на промежутках $a < x < b$ и $0 < y < c$ известны напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q(x), \quad (a < x < b) \\ \sigma_{xx}(0, y) &= \sigma(y), \quad (0 < y < c) \end{aligned} \quad (2)$$

с использованием известных соотношений, полученных в работе [1], производные перемещений можно представить в виде

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u(x, 0^+)}{\partial x} &= (1 - \nu) p(x) + \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{q(t) dt}{x-t} - \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{q(t) dt}{x+t} \\ &+ \int_a^b R_1(t, x) p(t) dt + \int_a^b R_2(t, x) q(t) dt \\ &- \int_0^c R_3(t, x) \sigma(t) dt + f_1^+(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u(x, 0^-)}{\partial x} &= (1 - \nu) p(x) + \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{q(t) dt}{x+t} - \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{q(t) dt}{x-t} \\ &+ \int_a^b K_1(t, x) p(t) dt + \int_a^b K_2(t, x) p(t) dt + f_1^-(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \frac{\partial v(x, 0^+)}{\partial x} &= (\nu - 1) q(x) + \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{p(t) dt}{x-t} - \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{p(t) dt}{x+t} \\ &+ \int_a^b R_3(t, x) p(t) dt - \int_a^b R_4(t, x) q(t) dt \\ &- \int_0^c R_5(t, x) \sigma(t) dt + f_2^+(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \frac{\partial v(x, 0^-)}{\partial x} &= (\nu - 1) q(x) - \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{p(t) dt}{x+t} - \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{p(t) dt}{x-t} \\ &- \int_a^b K_3(t, x) p(t) dt - \int_a^b K_4(t, x) q(t) dt + f_2^-(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \frac{\partial u(0^+, y)}{\partial y} &= \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{\sigma(t) dt}{y-t} - \frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{\sigma(t) dt}{y+t} \\
&\quad - \int_a^b R_6(t, y) p(t) dt + \int_a^b R_5(t, y) q(t) dt \\
&\quad + \int_0^c R_3(t, y) \sigma(t) dt + f_3^*(y)
\end{aligned} \tag{3}$$

где E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, а функции $f_1^+(x)$, $f_1^-(x)$, ($i=1,2$) и $f_3^*(y)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
f_1^+(x) &= (1-\nu) p_0(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{q_0(t) dt}{x-t} + \frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{q_0(t) dt}{x-t} \\
&\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{q_0(t) dt}{x+t} - \frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{q_0(t) dt}{x+t} + \int_0^a R_1(t, x) p_0(t) dt \\
&\quad + \int_b^{\infty} R_1(t, x) p_0(t) dt + \int_0^a R_2(t, x) q_0(t) dt \\
&\quad + \int_b^{\infty} R_2(t, x) q_0(t) dt - \int_c^{\infty} R_7(t, x) \sigma_0(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1^-(x) &= (1-\nu) p_0(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{q_0(t) dt}{x+t} + \frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{q_0(t) dt}{x+t} \\
&\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{q_0(t) dt}{x-t} - \frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{q_0(t) dt}{x-t} + \int_0^a K_1(t, x) p_0(t) dt \\
&\quad + \int_b^{\infty} K_1(t, x) p_0(t) dt + \int_0^a K_2(t, x) q_0(t) dt \\
&\quad + \int_b^{\infty} K_2(t, x) q_0(t) dt
\end{aligned}$$

$$f_2^*(x) = (\nu-1) q_0(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{p_0(t) dt}{x-t} + \frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{p_0(t) dt}{x-t}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{p_0(t) dt}{x+t} - \frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{p_0(t) dt}{x+t} + \int_b^{\infty} R_3(t, x) p_0(t) dt \\
& + \int_0^a R_3(t, x) p_0(t) dt - \int_0^a R_4(t, x) q_0(t) dt \\
& - \int_b^{\infty} R_4(t, x) q_0(t) dt - \int_c^{\infty} R_6(t, x) \sigma_0(t) dt \\
f_3^+(y) = & \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{\sigma_0(t) dt}{y-t} - \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{\sigma_0(t) dt}{y+t} \\
& - \int_0^a R_6(t, y) p_0(t) dt - \int_b^{\infty} R_6(t, y) p_0(t) dt \\
& + \int_0^a R_5(t, y) q_0(t) dt + \int_b^{\infty} R_5(t, y) q_0(t) dt \\
& + \int_c^{\infty} R_3(t, y) \sigma_0(t) dt
\end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что знаки (+) или (-) в функциях f_i относятся соответственно к квадранту и полуплоскости, которые получены в результате разбиения данной области. Виды функций $K_j(t, x)$ и $R_j(t, x)$ ($j=1, 4$) ($j=1, 7$), входящих в (3), приведены в работе [1].

Удовлетворив условиям контакта

$$\begin{aligned}
u(x, 0^+) &= u(x, 0^-) \\
v(x, 0^+) &= v(x, 0^-) \quad (a < x < b)
\end{aligned} \tag{5}$$

и условию симметрии

$$u(0, y) = 0 \quad (0 < y < c) \tag{6}$$

из (3) получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функции $p(x)$, $q(x)$ и $\sigma(y)$

$$\frac{4}{\pi} \int_a^b \frac{p(t) dt}{x-t} + \int_a^b M_{11}(t, x) p(t) dt + \int_a^b M_{12}(t, x) q(t) dt$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^c R_6(t, x) \sigma(t) dt = F_1(x) \quad , \quad x \in (a, b) \\
& \frac{4}{\pi} \int_a^b \frac{q(t) dt}{x-t} - \frac{4}{\pi} \int_a^b \frac{q(t) dt}{x+t} + \int_a^b M_{21}(t, x) p(t) dt \\
& + \int_a^b M_{22}(t, x) q(t) dt - \int_0^c R_7(t, x) \sigma(t) dt = F_2(x) \\
& \quad \quad \quad x \in (a, b) \\
& \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{\sigma(t) dt}{x-t} - \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{\sigma(t) dt}{x+t} - \int_a^b R_8(t, x) p(t) dt \\
& + \int_a^b R_5(t, x) q(t) dt + \int_0^c R_3(t, x) \sigma(t) dt = F_3(x) \\
& \quad \quad \quad x \in (0, c) \tag{7}
\end{aligned}$$

где функции $M_{ij}(t, x)$ ($i, j = 1, 2$) и $F_l(x)$ ($l = 1, 2, 3$) приведены в работе [1].

Интегральные условия равновесия, которым должны удовлетворять решения системы (7), имеют вид

$$\begin{aligned}
& \int_a^b p(t) dt = - \int_0^a p_0(x) dx - \int_b^{\infty} p_0(x) dx \\
& \int_a^b q(t) dt + \int_0^c \sigma(y) dy = - \int_0^a q_0(x) dx - \int_b^{\infty} q_0(x) dx \\
& \quad \quad \quad - \int_c^{\infty} \sigma_0(y) dy \tag{8}
\end{aligned}$$

Путем замены переменных

$$x = \frac{b-a}{2} z + \frac{a+b}{2}, \quad t = \frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2} \quad \text{при } (a < x, t < b)$$

и

$$y = \frac{c}{2} (z+1), \quad t = \frac{c}{2} (y+1) \quad \text{при } (0 < t, y < c)$$

систему (7) сведем к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_1(y) dy}{z-y} + \int_{-1}^1 N_{11}(y, z) \Phi_1(y) dy \\
& + \int_{-1}^1 N_{12}(y, z) \Phi_2(y) dy + \int_{-1}^1 N_{13}(y, z) \Phi_3(y) dy = \varphi_1(z) \\
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_2(y) dy}{z-y} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_2(y) dy}{z+y+2} \frac{a+b}{b-a} \\
& + \int_{-1}^1 N_{21}(y, z) \Phi_1(y) dy + \int_{-1}^1 N_{22}(y, z) \Phi_2(y) dy \\
& + \int_{-1}^1 N_{23}(y, z) \Phi_3(y) dy = \varphi_2(z) \\
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_3(y) dy}{z-y} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_3(y) dy}{z+y+2} \\
& + \int_{-1}^1 N_{31}(y, z) \Phi_1(y) dy + \int_{-1}^1 N_{32}(y, z) \Phi_2(y) dy \\
& + \int_{-1}^1 N_{33}(y, z) \Phi_3(y) dy = \varphi_3(z) \tag{9}
\end{aligned}$$

В (9) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(y) &= p \left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2} \right), \quad \Phi_2(y) = q \left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2} \right) \\
\Phi_3(y) &= \sigma \left[\frac{c}{2} (y+1) \right]
\end{aligned}$$

а остальные функции определяются аналогичным образом.
Решение системы (9) в классе

$$G = \begin{cases} \Phi_1(y), \quad \Phi_1(y) = \frac{\Phi_1(y)}{\sqrt{1-y^2}}, \quad i = 1, 2 \\ \Phi_3(y), \quad \Phi_3(y) = \left(\frac{1+y}{1-y} \right)^{\frac{1}{2}} \Phi_3(y) \end{cases} \tag{10}$$

где $\Phi_i(y)$ ($i = 1, 2, 3$) регулярные функции, существует и единственно [7,3].

Используя известные квадратурные формулы [4] с учетом (8) и (10),

система сингулярных интегральных уравнений (9) приводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^n \frac{1}{n} \left[\left[\frac{1}{z_k - y_l} + \pi N_{11}(y_l, z_k) \right] \Phi_1(y_l) \right. \\
 & \left. + \pi N_{12}(y_l, z_k) \Phi_2(y_l) \right] + \sum_{l=1}^n \frac{2(1+\bar{y}_l)}{2n+1} N_{13}(\bar{y}_l, z_k) \Phi_3(\bar{y}_l) \\
 & = \varphi_1(z_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\
 & \sum_{l=1}^n \frac{1}{n} \left[\left[\frac{1}{z_k - y_l} - \frac{1}{z_k + y_l + 2 \left(\frac{a+b}{b-a} \right)} + \pi N_{22}(y_l, z_k) \right] \Phi_2(y_l) \right. \\
 & \left. + \pi N_{21}(y_l, z_k) \Phi_1(y_l) \right] + \sum_{l=1}^n \frac{2(1+\bar{y}_l)}{2n+1} N_{23}(\bar{y}_l, z_k) \Phi_3(\bar{y}_l) \\
 & = \varphi_2(z_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\
 & \sum_{l=1}^n \frac{2(1+\bar{y}_l)}{2n+1} \left[\frac{1}{z_k - \bar{y}_l} - \frac{1}{z_k + \bar{y}_l + 2} + N_{33}(\bar{y}_l, z_k) \right] \Phi_3(\bar{y}_l) \\
 & + \sum_{l=1}^n \frac{1}{n} \left[\pi N_{31}(y_l, z_k) \Phi_1 + \pi N_{32}(y_l, z_k) \Phi_2 \right] \\
 & = \varphi_3(z_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\
 & \sum_{l=1}^n \frac{\pi}{n} \Phi_1(y_l) = c_1 \\
 & \sum_{l=1}^n \frac{\pi}{n} \Phi_2(y_l) + \frac{2(1+\bar{y}_l)}{2n+1} \Phi_3(\bar{y}_l) = c_2 \tag{11}
 \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 c_1 &= - \int_0^a p_0(x) dx - \int_b^{\infty} p_0(x) dx \\
 c_2 &= - \int_0^a q_0(x) dx - \int_b^{\infty} q_0(x) dx - \int_c^{\infty} \sigma_0(y) dy \tag{12}
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись решениями системы (10), коэффициенты интенсивности напряжений определим по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 K_1(a) &= \frac{\Phi_1(-1)}{\sqrt{2}}, & K_2(a) &= \frac{\Phi_2(-1)}{\sqrt{2}} \\
 K_1(b) &= \frac{\Phi_1(1)}{\sqrt{2}}, & K_2(b) &= \frac{\Phi_2(1)}{\sqrt{2}} \\
 K_1(c) &= \sqrt{2} \Phi_3(1)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Таблица 1

$h/a = 1, c/a = 1.5$

b/a K/ρ_0	1.1	1.5	2	3
$K_1(a)/\rho_0$	3.752	0.538	0.201	0.054
$K_2(a)/\rho_0$	-0.015	-0.026	-0.019	-0.032
$K_1(b)/\rho_0$	4.998	1.341	0.808	0.451
$K_2(b)/\rho_0$	0.013	0.011	0.006	0.012
$K_1(c)/\rho_0$	-0.038	-0.036	-0.031	-0.023

В табл. 1 приведены численные значения коэффициентов интенсивности напряжений при различных значениях геометрических параметров, когда нормальная нагрузка действует на единицу длины полубесконечных горизонтальных трещин.

Таблица 2

$c/a = 1$

K/ρ_0	h/a	b/a	1.1	1.5	2	5
$K_1(a)/\rho_0$	0.5		6.180	1.56	0.861	0.349
$K_2(a)/\rho_0$			-0.152	-0.139	-0.122	-0.075
$K_1(b)/\rho_0$			15.02	1.031	0.194	0.046
$K_2(b)/\rho_0$			0.729	0.269	0.133	0.009
$K_1(a)/\rho_0$	1		6.232	1.616	0.865	0.361
$K_2(a)/\rho_0$			-0.094	-0.091	-0.086	-0.055
$K_1(b)/\rho_0$			13.93	0.967	0.197	0.027
$K_2(b)/\rho_0$			0.364	0.176	0.106	0.021
$K_1(a)/\rho_0$	5		6.384	1.67	0.881	0.369
$K_2(a)/\rho_0$			-0.079	-0.057	-0.042	-0.048
$K_1(b)/\rho_0$			13.75	0.904	0.188	0.012
$K_2(b)/\rho_0$			0.271	0.111	0.058	0.010

В случае, когда нормальная нагрузка задана на берегах трещины конечной длины, значения коэффициентов интенсивности напряжений приведены в табл.2.

Как видно из таблиц 1.2, при фиксированном значении $(H - h)$ увеличение расстояния между горизонтальными трещинами приводит к уменьшению значений коэффициентов интенсивности нормальных напряжений, а по мере удаления границы полуплоскости от трещины их значения возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афан Б.А., Степанян С.П. Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещинами. -Изв.АН Арм ССР. Механика, 1989, т.42, N 2, с.50-57.
2. Гахов Ф.Д. Красные задачи. -М.: Физматгиз, 1963 640с.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. -М.: Физматгиз, 1962, 511 с.
4. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations.- In: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973, pp.368-425.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 1.11.1990