

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ

ЗАДОЯН М.А.

Չադոյան Մ.Ա., Գրիզմատիկ մարմինների էքսպոնենցիալ դեֆորմացումը Առաջարկվում է պլաստիկության հոսունության անստիչայան ընդհանուր հավասարումների լուծման մի դաս. որտեղ դեֆորմացիաների արագությունների տեմպերը փոփոխվում է մի ուղղությամբ էքսպոնենցիալ օրենքով: Մասնավորապես ստումնասիրվում է պրիզմատիկ ձողի համատեղ ծգումը, ծռումը և ոլորումը, որտեղ ընդհանրացվում են Հիլլի հայտնի լուծումը, և Քրեյտի թեորեմը՝ բազմակապ ախրությունների համար: Ինտարկվում է նաև քարակապտ խողովակի խճողրը:

Предлагается класс решений общих уравнений теории пластического течения, когда тензор скоростей деформации меняется по одному направлению по экспоненциальному закону. В частности, рассматривается совместный изгиб кручения и растяжения призматического стержня, где обобщается известное решение Хилла и теорема Крейга для многосвязных областей. Обсуждается также случай тонкостенных труб

Zadoyan M.A. Exponential Deformation of Prismatic Solid

Рассматривается класс пространственных задач идеально жестко - пластических тел, деформируемых в одном из направлений по экспоненциальному закону. Исследования по пространственным задачам теории пластичности немногочисленны [1-3]. Обзоры этих работ можно найти в [4,5].

1. Исходные уравнения и представление решения. Принимаем материал несжимаемым и удовлетворяющим соотношениям теории идеально жестко - пластического течения с условием пластичности Губера-Мизеса. В прямоугольной системе координат в обычных обозначениях имеем: дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

соотношения между компонентами скоростей деформаций, скоростей перемещений и напряжений

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(\sigma_x - \sigma) \dots, \quad 2\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\tau_{xy} \dots \quad (1.2)$$

условие пластичности Губера - Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6k^2 \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем компоненты напряжений отнесены к пластической постоянной k .

1. Будем исследовать пластические течения среды, когда компоненты скоростей деформаций представляются в форме

$$\epsilon_{ij} = \exp(\mu z) \omega_{ij} \quad (1.4)$$

где $\omega_{ij} = \omega_{ij}(x, y)$ - произвольные функции x и y , а μ - постоянный параметр. Из условия несжимаемости материала имеем

$$\omega_x + \omega_y + \omega_z = 0 \quad (1.5)$$

Компоненты напряжений, удовлетворяющие условиям пластичности и несжимаемости, можно представить следующим образом:

$$\sigma_x = \sigma_z + \frac{1}{\Omega} (2\omega_x + \omega_y), \quad \sigma_y = \sigma_z + \frac{1}{\Omega} (\omega_x + 2\omega_y)$$

$$\tau_{ij} = \frac{1}{\Omega} \omega_{ij}, \quad \Omega = \sqrt{\omega_{xy}^2 + \omega_{xz}^2 + \omega_{yz}^2}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_x \omega_y + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (1.6)$$

Подставляя эти выражения компонентов напряжений в уравнения равновесия (1.1), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega_{xz}}{\Omega} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\omega_{yz}}{\Omega} \right) + 2E = 0 \quad (1.7)$$

и выжжению

$$\sigma_x = F + 2Ez$$

где E - произвольная постоянная, а $F = F(x, y)$ - неизвестная функция x и y , удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{2\omega_x + \omega_y}{\Omega} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\omega_{xy}}{\Omega} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\omega_{xy}}{\Omega} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\omega_x + 2\omega_y}{\Omega} = 0 \quad (1.8)$$

Скорости перемещений из (1.2) можно представить в следующем виде:

$$u = u_0(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial x} z + \frac{2}{\mu} (e^{\mu z} - 1) \omega_{xz} - \frac{1}{\mu^2} (e^{\mu z} - \mu z - 1) \frac{\partial \omega_x}{\partial x}$$

$$v = v_0(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial y} z + \frac{2}{\mu} (e^{\mu z} - 1) \omega_{yz} - \frac{1}{\mu^2} (e^{\mu z} - \mu z - 1) \frac{\partial \omega_z}{\partial y}$$

$$w = w_0(x, y) + \frac{1}{\mu} (e^{\mu z} - 1) \omega_z \quad (1.9)$$

Здесь u_0 , v_0 , w_0 — произвольные функции x и y . Подставляя выражения u , v , w из (1.9) в (1.4), сопоставляя правые и левые части полученных уравнений и вводя обозначения

$$R = \mu w_0 - \omega_z, \quad Q_x = u_0 - \frac{2}{\mu} \omega_{xz} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \omega_x}{\partial x}$$

$$Q_y = v_0 - \frac{2}{\mu} \omega_{yz} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \omega_y}{\partial y}$$

приходим к двум системам дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} = 0$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\omega_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \omega_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \omega_z = \lambda w_0 + Ax + By + C$$

$$2\omega_{xy} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}, \quad 2\omega_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \lambda u_0 + Dy \quad (1.10)$$

$$2\omega_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \lambda v_0 - Dx, \quad A, B, C, D = \text{const}$$

Далее, исключая $F(x, y)$ из (1.8), приходим к выражению

$$F = H + \left[\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right]_{x=0} - \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right\} \right]_{x=0} dy$$

$$- \frac{1}{\Omega} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] dx, \quad H = \text{const} \quad (1.11)$$

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \mu u_0 + Dy \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \mu v_0 - Dx \right)^2} \quad (1.12)$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2}$$

и к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.13)$$

С учетом (1.10) уравнение (1.7) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \mu u_0 + D y \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \mu v_0 - D x \right) \right] + 4 E = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Далее из (1.5) и (1.10) будем иметь

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda w_0 + A x + B y + C = 0 \quad (1.15)$$

Система дифференциальных уравнений (1.13)-(1.15) при заданных граничных условиях, в принципе, определяет функции u_0 , v_0 , w_0 . Компоненты выражения определяются через эти функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x + \frac{1}{\Omega} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= \sigma_x + \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\ \sigma_z &= H + 2 E z + \left[\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right]_{x=0} \\ & - \frac{1}{2} \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \right]_{x=0} dy - \frac{1}{\Omega} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] dx \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2 \Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2 \Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \mu u_0 + D y \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2 \Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \mu v_0 - D x \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Скорости перемещения (1.9) при учете (1.10) можно представить в следующей форме:

$$u = u_0 \exp(\mu z) + \frac{D}{\mu} y (\exp(\mu z) - 1) - \frac{A}{\mu^2} (\exp(\mu z) - \mu z - 1)$$

$$v = v_0 \exp(\mu z) - \frac{D}{\mu} x (\exp(\mu z) - 1) - \frac{B}{\mu^2} (\exp(\mu z) - \mu z - 1) \quad (1.17)$$

$$w = w_0 \exp(\mu z) + \frac{1}{\mu} (\exp(\mu z) - 1) (Ax + By + C)$$

Таким образом, компоненты напряжений и скоростей перемещений выражаются через функции u_0 , v_0 , w_0 , которые определяются из системы дифференциальных уравнений (1.13)-(1.15) при соответствующих граничных условиях.

Используя (1.15), можно из уравнений (1.13)-(1.14) и из соотношений (1.16)-(1.17) при условии $\mu \neq 0$ исключить функцию w_0 .

2. Второе представление решений. Если ввести функцию напряжений

$$\frac{1}{2\Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \mu u_0 + D y \right) = \frac{\partial f}{\partial y} - E x \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2\Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \mu v_0 - D x \right) = - \frac{\partial f}{\partial x} - E y$$

из (1.12) будем иметь

$$\Omega = \frac{\omega}{\chi}, \quad \chi = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + E y \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} - E x \right)^2}$$

Далее, исключая из (2.1) функцию w_0 , приходим к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\omega}{\chi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + E y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\omega}{\chi} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - E x \right) \right] \\ = D + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнение (1.15) и компоненты скоростей (1.17) остаются без изменения, а (1.13) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Компоненты напряжения запишутся в форме

$$\sigma_x = \sigma_1 + \frac{\chi}{\omega} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_y = \sigma_1 + \frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_z = H + 2 E z + \left[\frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right]_{x=0}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\kappa}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \right]_{z=0} dy - \frac{\kappa}{\omega} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\kappa}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2\omega}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial f}{\partial y} - Ex, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial f}{\partial x} - Ey$$

Для определения функций f , u_0 , v_0 , w_0 , входящих в (1.17) и (2.4), следует проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (1.15), (2.1)-(2.3) при соответствующих граничных условиях.

3. Случай $\mu = 0$. В полученных формулах напряжений (1.16), переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, будем иметь

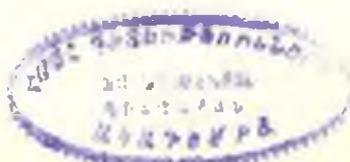
$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_z + \frac{1}{\Omega_*} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = \sigma_z + \frac{1}{\Omega_*} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\
 \sigma_z &= H + 2Ex + \left[\frac{1}{\Omega_*} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right]_{z=0} \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\Omega_*} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \right]_{z=0} dy - \frac{1}{\Omega_*} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\Omega_*} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] dx \\
 \tau_{xy} &= \frac{1}{2\Omega_*} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \frac{1}{2\Omega_*} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + Dy \right) \\
 \tau_{yz} &= \frac{1}{2\Omega_*} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - Dx \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\Omega_* = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + Dy \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - Dx \right)^2}$$

Скорости перемещений из (1.17) при $\mu \rightarrow 0$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(x, y) + Dyz - \frac{A}{2} z^2 \\
 v &= v_0(x, y) - Dxz - \frac{B}{2} z^2 \\
 w &= w_0(x, y) + (Ax + By + C)z
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Система дифференциальных уравнений (1.13)-(1.15) при $\mu \rightarrow 0$ примет следующую форму:



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + D y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - D x \right) \right] + 4 E = 0$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + A x + B y + C = 0 \quad (3.3)$$

Если ввести функцию перемещения $\varphi(x, y)$ в виде

$$u_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2} A x^2 - \frac{1}{2} C x \quad (3.4)$$

$$v_0 = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} B y^2 - \frac{1}{2} C y$$

третье уравнение (3.3) превратится в тождество, а первое и второе переписываются следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - A x + B y \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + D y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - D x \right) \right] + 4 E = 0 \quad (3.5)$$

причем

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + D y \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - D x \right)^2}$$

$$\omega_0 = \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - A x - \frac{1}{2} C \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - A x - \frac{1}{2} C \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + B y - \frac{1}{2} C \right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + B y + \frac{1}{2} C \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Для компонент напряжений будем иметь

$$\sigma_x = \sigma_z + \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2 A x - B y - \frac{3}{2} C \right)$$

$$\sigma_y = \sigma_z - \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + A x + 2 B y + \frac{3}{2} C \right)$$

$$\sigma_z = H + 2 E z + \left[\frac{1}{\Omega_0} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + B y \right) \right]_{x=0}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right) \right]_{x=0} dy \\
& - \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2Ax - By - \frac{3}{2}C \right) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] dx \\
\tau_{xy} &= \frac{1}{2\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \\
\tau_{xz} &= \frac{1}{2\Omega_0} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + Dy \right) \\
\tau_{yz} &= \frac{1}{2\Omega_0} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - Dx \right) \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Подставляя (3.4) в (3.2), для компонентов скоростей перемещений будем иметь

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2}A(x^2 + z^2) + Dyz - \frac{1}{2}Cx \\
v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2}B(y^2 + z^2) - Dxz - \frac{1}{2}Cy \\
w &= w_0(x, y) + Axz + Byz + Cz \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Для определения функции w_0 и φ , входящих в выражения компонентов напряжений (3.6) и скоростей перемещений (3.7) необходимо интегрировать систему уравнений (3.5) при заданных граничных условиях.

3. В случае введения функции напряжения $f(x, y)$ по (2.1) при $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + Dy \right) &= \frac{\partial f}{\partial y} - Ex \\
\frac{1}{2\Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - Dx \right) &= -\frac{\partial f}{\partial x} - Ey
\end{aligned}$$

компоненты напряжений из (3.6) будут

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_z + \frac{\chi}{\omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2Ax - By - \frac{3}{2}C \right) \\
\sigma_y &= \sigma_z - \frac{\chi}{\omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Ax + 2By + \frac{3}{2}C \right) \\
\sigma_z &= H + 2Ez + \left[\frac{\chi}{\omega_0} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + By \right) \right]_{x=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\chi}{\omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] \right]_{x=0} dy \\
& - \frac{\chi}{\omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2Ax - By - \frac{3}{2}C \right) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\chi}{\omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] dx
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\chi}{2\omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial f}{\partial y} - Ex$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial f}{\partial x} - Ey$$

Скорости перемещений (3.7) остаются без изменения, а система уравнений, определяющая функции φ и f запишется в виде

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\chi}{\omega_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Ax + By \right) \frac{\chi}{\omega_0} = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\omega_0}{\chi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + Ey \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\omega_0}{\chi} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - Ex \right) \right] - 2D = 0$$

4. Пусть призматический стержень под действием внешних сил на торцевых сечениях находится в равновесии в предельном напряженном состоянии (задача Р.Хилла).

Полагая

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = Ax - By$$

интегрированием находим

$$\varphi = \frac{1}{12} Ay^3 - \frac{1}{12} Bx^3 + \frac{1}{4} Ax^2y - \frac{1}{4} By^2x - \frac{h}{2}(x^2 + y^2) \tag{3.10}$$

Далее, принимая $H = E = C$ из (3.8) для компонент напряжений получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \kappa \sqrt{3} \sqrt{1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \\
\kappa &= \text{sign}(Ax + By + C)
\end{aligned}$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (3.11)$$

Первое уравнение (3.9) удовлетворяется тождественно, а второе переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(Ax + By + C)f_y}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(Ax + By + C)f_x}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}} \right] - \frac{2\kappa D}{\sqrt{3}} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

где f_x и f_y означают частные производные $f(x, y)$.

Подставляя (3.10) в (3.7), для скоростей перемещений получаем

$$\begin{aligned} u &= \frac{A}{4}(y^2 - x^2 - 2z^2) - \frac{B}{2}xy + Dyz - \frac{1}{2}Cx - hy \\ v &= -\frac{A}{2}xy + \frac{B}{2}(x^2 - y^2 - 2z^2) - Dxz - \frac{1}{2}Cy + hx \\ w &= w_0(x, y) + Axz + Byz + Cz \end{aligned} \quad (3.13)$$

Внешние нагрузки, приложенные на торцевых сечениях, статически эквивалентны продольной силе

$$N = \kappa \sqrt{3} \iint \sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2} dx dy$$

крутящему моменту

$$M_z = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = -2 \iint f(x, y) dx dy$$

и изгибающему моменту с компонентами

$$M_x = \kappa \sqrt{3} \iint y \sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2} dx dy$$

$$M_y = -\kappa \sqrt{3} \iint x \sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2} dx dy$$

Уравнение (3.12) и формулы (3.11), (3.13) получены Р.Хиллом [1] в 1948г.

4. Боковое сжатие квадратного бруса. Рассмотрим брус из идеально жесткого материала с квадратным поперечным сечением, сжимающийся между четырьмя плитами с одинаковой шероховатостью и скоростью сближения.

Такую гипотетическую задачу практически можно реализовать, пропуская, для сближения плит, необходимые для зазора в узлах $\pm h$, $\pm h$, z . Учитывая симметрию задачи, рассматриваем область

$$\begin{aligned} \tau_{xz}|_{x=h} = \tau_{yz}|_{y=h} = m, \quad \tau_{xz}|_{x=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0 \\ u|_{x=h} = v|_{y=h} = -V, \quad u|_{x=0} = v|_{y=0} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где V и m , соответственно, скорость сближения и степень шероховатости плит, причем $V > 0$, $0 \leq m \leq \sqrt{2}/2$.

Полуобратным способом принимаем

$$\tau_{xz} = ax, \quad \tau_{yz} = ay \quad (4.2)$$

$$u = u_0 = -bx, \quad v = v_0 = -by, \quad b = \frac{V}{h}$$

Полагая также $A = B = D = 0$, первому уравнению (3.3) удовлетворяем тождественно, а из второго и третьего уравнений, соответственно, находим $E = -a$, $C = 2b$.

Сопоставляя выражения τ_{xz} и τ_{yz} из (3.1) при $D=0$ и (4.2), получаем

$$Q_z = \frac{\sqrt{3} b}{\sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)}} \quad (4.3)$$

Остальные компоненты напряжения согласно (3.1) и (4.2)-(4.3) будут

$$\sigma_x = \sigma_y = H + 2Ez, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (4.4)$$

$$\sigma_z = H + 2Ez + \sqrt{3} \sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)}$$

Из условий равновесия части бруса $0 \leq \xi \leq z$

$$\int_0^h \int_0^h \sigma_z dx dy + 2mhz = 0$$

определяя H и подставляя в (4.4), получаем

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\sqrt{3}}{4m^2} K - 2az, \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_z = -\frac{\sqrt{3}}{4m^2} K - 2az + \sqrt{3} \sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)}$$

где

$$K = 4 \int_0^m \int_0^m \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^m (1 - x^2) \arcsin \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}} dx + m(1 - m^2) \arcsin \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} + m^2 \sqrt{1 - 2m^2}$$

Сила давления на каждую плиту будет

$$P = -4 \int_0^h \int_0^h \sigma_x dx dy = hl \left(\frac{\sqrt{3}}{m^2} K + 4m \frac{l}{h} \right)$$

Для определения функций w_0 приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\sqrt{3} a b x}{\sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)}}, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\sqrt{3} a b y}{\sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)}}$$

После интегрирования из (3.2) при $A = B = 0$ получаем

$$w = L + 2bz - 2\sqrt{3} \frac{V}{m} \sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)} \quad (4.5)$$

где L - произвольная постоянная. Из условий сохранения количества масс

$$\iint_{00}^{hh} w \, dx \, dy + 2Vh(l-z) = 0$$

определяя L и подставляя в (4.5), окончательно находим

$$\frac{w}{V} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{K}{m^3} - 2 \left(\frac{l}{h} - \frac{z}{h} \right) - 2 \frac{\sqrt{3}}{m} \sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)} \quad (4.6)$$

Полученное решение имеет традиционный недостаток, характерный для решений типа решения Прандтля. Оно точно в середине и на концах.

2. Переходя к цилиндрическим координатам, из приведенного решения можно получить решение задачи о вдавливании идеально жестко пластического материала из шероховатой цилиндрической втулки [1]. Обозначая внутренний радиус трубы h , а скорость уменьшения этого радиуса V и переходя к цилиндрическим координатам, из (4.2), (4.4), (4.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = H - 2az, \quad \tau_{rz} = ar \\ \sigma_z = H - 2az + \sqrt{3} \sqrt{1 - a^2 r^2} \\ u = -V \frac{r}{h}, \quad w = L + 2bz - 2\sqrt{3} \frac{V}{m} \sqrt{1 - a^2 r^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из условий равновесия части цилиндрической массы

$$\int_0^h \sigma_z r \, dr + mh z = 0$$

определяя H , для напряжений окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3} m^2} \left[1 - (1 - m^2)^{\frac{1}{2}} \right] - 2az \\ \sigma_z = - \frac{2}{\sqrt{3} m^2} \left[1 - (1 - m^2)^{\frac{1}{2}} \right] - 2az + \sqrt{3} \sqrt{1 - a^2 r^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Определяя L из условия сохранения количества масс

$$\int_0^h w r dr + V h (1 - z) = 0 \quad (4.9)$$

окончательно получаем

$$\frac{w}{V} = \frac{4}{\sqrt{3} m^3} \left[1 - (1 - m^2)^{\frac{3}{2}} \right] - 2 \left(\frac{l}{h} - \frac{z}{h} \right) - \frac{2\sqrt{3}}{m} \sqrt{1 - a^2 r^2}$$

Формулы напряжений и скоростей перемещений (4.7)-(4.9) получены Р. Хиллом [1]

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. - М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности. - М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
3. Иклев Д.Д. Теория идеальной пластичности. - М.: Наука, 1966. 231 с.
4. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. - Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
5. Аннин Б.Д., Бытов В.О., Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. - Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 3.12.1990