

АЖ 412

К УПРУГОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

ՄՈՎՏԻՍՅԱՆ Լ.Ա.

Մոլվիտյան Լ.Ա., Առաձգական և առաձգամածուցիկ բաղադրյալ ձողի կայունության մասին

Դիտարկվում է երկու տարրեր երկարություններով տարրեր մյուսերից կազմված ձողի կայունությունը, երբ ճյուղերը առաձգական են կամ առաձգամածուցիկ, իսկ ազդող ուժը կիրառված է ճյուղերի բաժանման գծի վրա:

Изучается упругая и вязкоупругая устойчивость стержня, изготовленного из двух материалов различных длин. Сила приложена на границе их раздела. Показаны влияния граничных условий, свойства материалов и длин отдельных частей на значения критических сил и возможность выбора наибольшей критической силы в зависимости от направления приложенной силы. Для одного случая вязкоупругой задачи напряжения оказываются зависящими от времени, что приводит к необходимости понятия критического момента времени. В зависимости от направления приложенной силы показана возможность существования минимальной длительной критической силы больше мгновенной.

Movsisian L.A. An Elastic and Viscoelastic Bending of the Compound Beam

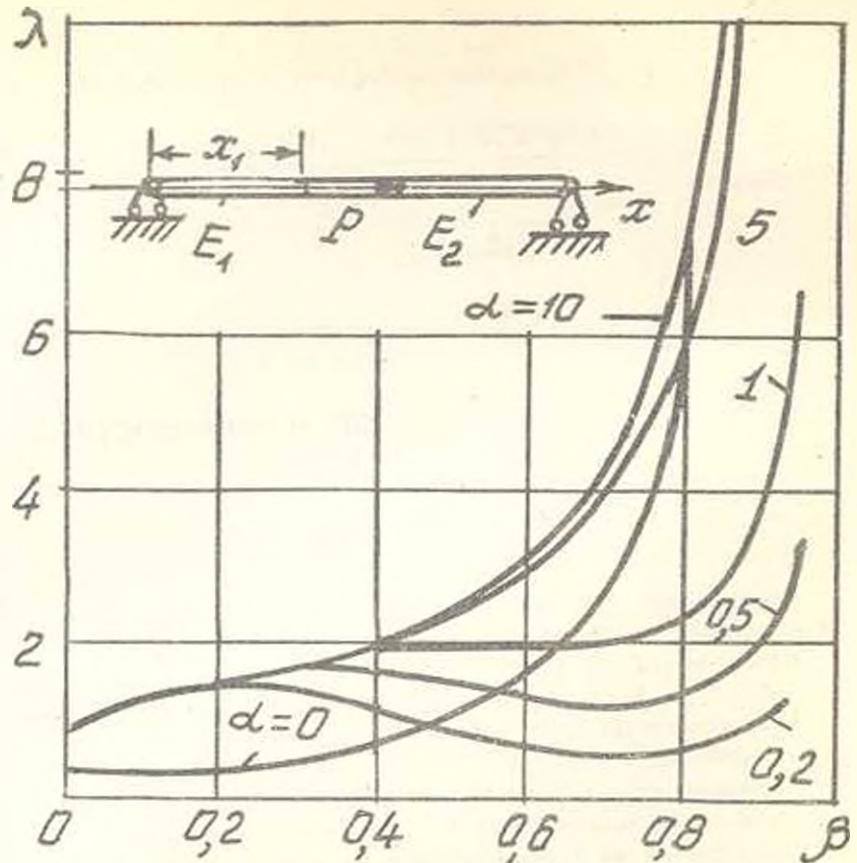
В работах [1,2] рассматривалась задача устойчивости составных стержней из двух равных по длине частей из различных материалов и нагруженных "мертвой" или "следающей" силой на границе раздела.

Вязкоупругая постановка этих задач представляет отдельный интерес. В случае, когда концы стержня защемлены, в сечениях напряжение зависит от времени (хотя задача нерелаксационная).

Это приводит к необходимости введения понятия критического момента времени потери устойчивости. В зависимости от свойств материалов и длин отдельных частей, критические силы будут различными для двух направлений их действия (от "сильного" материала к "слабому" или наоборот).

В то же время оказалось, что обобщение рассмотренных задач с математической точки зрения является тривиальным, но, однако, полученные результаты представляют определенный интерес.

1. Пусть имеется стержень из двух частей : из различных материалов и различных длин. Действующая сила  $P$  неизменного направления приложена на границе раздела этих частей (фиг.1). Изучим два случая невозмущенного состояния:



Фиг.1

а) конец  $x=0$  свободен, а конец  $x=l$  закреплён;

б) оба конца закреплёны.

Относительно возмущённого состояния будем предполагать наличие шарнирного закреплёния на концах балки.

В первом случае уравнения устойчивости запишутся следующим образом:

$$E_1 J \frac{d^4 w_1}{dx^4} = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1$$

$$E_2 J \frac{d^4 w_2}{dx^4} + P \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0, \quad x_1 \leq x \leq l \quad (1.1)$$

Для второго случая уравнениями устойчивости будут

$$E_1 J \frac{d^4 w_1}{dx^4} - P_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq x_1$$

$$E_2 J \frac{d^4 w_2}{dx^4} + P_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0, \quad x_1 \leq x \leq l \quad (1.2)$$

где растягивающая сила  $P_1$  и сжимающая  $P_2$  определяются формулами:

$$P_1 = \frac{E_1(1-\beta)}{E_1(1-\beta) + E_2\beta} P$$

$$P_2 = - \frac{E_2\beta}{E_1(1-\beta) + E_2\beta} P \quad (1.3)$$

Решения (1.1) и (1.2) записываются просто. После удовлетворения условиям на концах ( $w_1 = w_1'' = 0$  при  $x=0$  и  $x=l$ ) и условиям сопряжения на  $x = x_1$ :

$$w_1 = w_2, \quad w_1' = w_2', \quad E_1 w_1'' = E_2 w_2''$$

$$E_1 w_1''' = E_2 (w_2''' + k^2 w_2')$$

для первого случая и

$$E_1 (w_1''' - k^2 w_1') = E_2 (w_2''' + k^2 w_2')$$

вместо последнего для второго случая получим следующие трансцендентные уравнения.

Для первого случая граничных условий

$$\left(1 + \frac{1}{\beta} - \frac{k^2 \beta^2}{3\alpha}\right) \sin(1-\beta) + k\beta \cos k(1-\beta) = 0$$

$$\beta = \frac{x_1}{l}, \quad \alpha = \frac{E_1}{E_2}, \quad k^2 = \lambda \pi^2,$$

$$\lambda = \frac{P}{P_2}, \quad P_2 = \frac{E_1 J \pi^2}{l^2} \quad (1.4)$$

На фиг.1 приведены кривые безразмерной критической нагрузки  $\lambda$  в зависимости от  $\beta$  для различных  $\alpha$ . Интересно то, что при  $\alpha < 1$   $\lambda$  сначала имеет возрастающий участок, а затем, начиная с некоторого значения  $\beta$ , — убывающий.

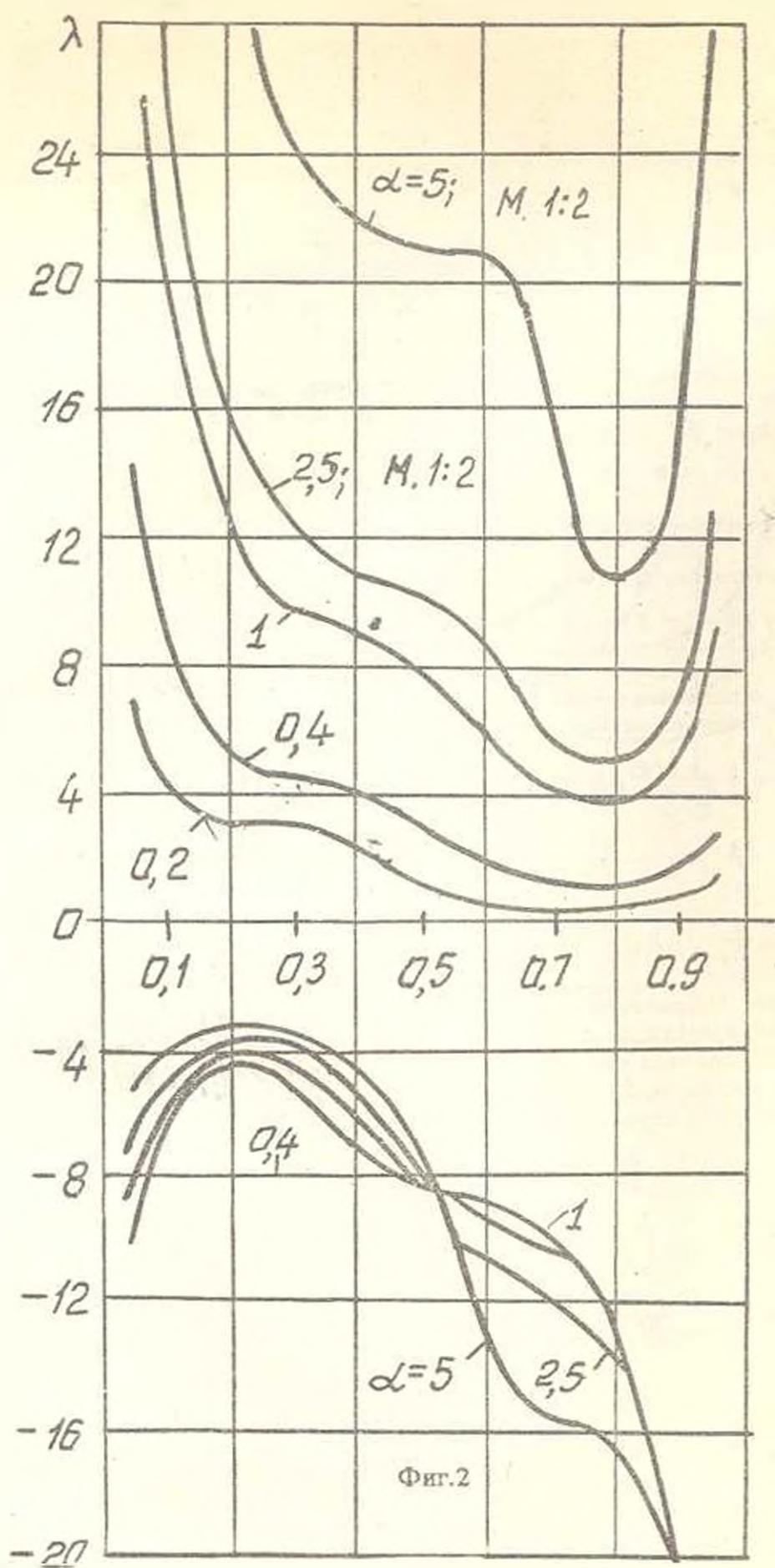
Для второго случая граничных условий имеем:

$$\left(1 + \frac{A}{B}\right)^2 + \left[\beta - \frac{A}{B}(1-\beta)\right] \left[k_2 \frac{A}{B} \operatorname{ctg} k_2(1-\beta) - k_1 \operatorname{cth} k_1 \beta\right] = 0 \quad (1.5)$$

$$A = \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha(1-\beta) + \beta}, \quad B = \frac{\beta}{\alpha(1-\beta) + \beta}$$

$$k_1^2 = \lambda \frac{\pi^2 A}{\alpha}, \quad k_2^2 = \lambda B \pi^2$$

На фиг.2 приведены значения  $\lambda$  в зависимости от  $\beta$  при различных  $\alpha$  для второй задачи. Под отрицательными  $\lambda$  понимается случай, когда сила направлена от участка с  $E_2$  к  $E_1$ .



Фиг. 2

(трансцендентное уравнение для этого случая получится из (1.5) взаимно заменяя тригонометрические и гиперболические функции).

Для того, чтобы кривые были соразмерными, для некоторых  $\alpha$  использован масштаб, который указан на соответствующих кривых.

На фиг.3 приведены кривые  $\lambda$  от  $\alpha$  для различных  $\beta$ . Как видно, в этом интервале для  $\alpha$ ,  $\lambda$  есть почти линейные функции для различных  $\beta$ .

Из приведенных фигур видно, что для  $\beta$  в интервале  $0 \leq \beta \leq 0.7$  критическая сила почти незначительно зависит от модуля упругости сжимаемой части балки и для показанной на фиг. 1 случая направления силы приближенно определяется формулой  $P_{кр} = 16(1 - \beta) E_1 J \pi^2 l^{-2}$ , а для обратного направления (направление силы от  $E_2$  к  $E_1$ ) -  $P_{кр} = 16\beta E_2 J \pi^2 l^{-2}$ . Для частного случая  $E_1 = E_2$   $\beta = 0.5$  получится  $P_{кр} = \pm 8 E J \pi^2 l^{-2}$  [3].

Интересно, что при заданных  $\alpha$  и  $\beta$  можно выбирать то направление действия силы, при котором ее критическое значение по абсолютной величине было бы наибольшим. В частности, при  $\beta = 0,5$  для  $\alpha > 1$  лучше силу направить, как показано на фиг.1, а для  $\alpha < 1$  - наоборот.

2. Теперь рассмотрим те же задачи в вязкоупругой постановке. Соответствующие операторы, характеризующие свойства материалов, обозначим через  $E_i = E_i(1 - \Gamma_i)$  [4]. Что касается первой задачи, то сжимающая сила будет такой же, как в упругой.

Для второй задачи действующие в сечении силы определяются по (1.3), если  $E_1$  заменить на  $E_i$ . В частности, для краткости записи, принимая, что материалы типа стандартного тела и что время релаксации для обеих частей одинаковы ( $1/\gamma$ ), получим:

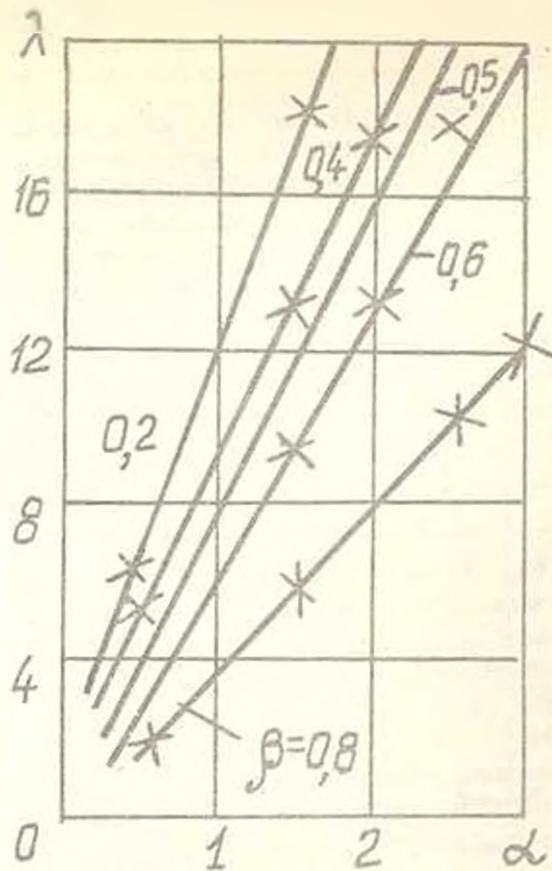
$$P_1(t) = \frac{E_1^\infty(1-\beta)}{E_1^\infty(1-\beta) + E_2^\infty\beta} \left[ 1 - \frac{\beta}{E_1^\infty} Q \exp(-\gamma_1 t) \right]$$

$$P_2(t) = \frac{E_2^\infty(1-\beta)}{E_1^\infty(1-\beta) + E_2^\infty\beta} \left[ 1 + \frac{1-\beta}{E_2^\infty} Q \exp(-\gamma_1 t) \right]$$

$$Q = \frac{E_1^\infty E_1 - E_2^\infty E_1}{E_1(1-\beta) + E_2\beta} \quad \gamma_1 = \frac{E_1^\infty(1-\beta) + E_2^\infty\beta}{E_1(1-\beta) + E_2\beta} \gamma \quad (2.1)$$

Здесь интересно не только то, что  $P_1$  и  $P_2$  зависят от времени ( $Q = 0$  при  $E_1 = E_2$ ), но и то, что в зависимости от величины коэффициентов длительные значения этих величин по абсолютному значению могут быть как меньше, так и больше их мгновенного значения. А это, в свою очередь, влияет на значение длительных критических сил.

Устойчивость вязкоупругого стержня будем изучать, не представляя уравнения возмущенного состояния для отдельных частей, как в предыдущем пункте, а поступим так, как в [5,6]. Такой способ упругих задач удобен тем, что вместо трансцендентного уравнения получаются алгебраические, а для вязкоупругих задач, возможно, этот способ является единственно пригодным.



Фиг.3

Итак, уравнение устойчивости запишем в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ P(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.2)$$

где

$$E, P = \begin{cases} E_1 \cdot \frac{E_1 (1 - \beta)}{E_1 (1 - \beta) + E_2 \beta} P, & 0 \leq x \leq x_1 \\ E_2 \cdot - \frac{E_2 \beta}{E_1 (1 - \beta) + E_2 \beta} P, & x_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.3)$$

Представим (2.3) в виде рядов, а (2.2) в виде ряда, удовлетворяющего граничным условиям

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos \lambda_k x$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \quad (2.4)$$

$$a_0 = E_1 \beta + E_2 (1 - \beta) \quad c_0 = \frac{(E_1 - E_2) \beta (1 - \beta) P}{E_2 \beta + E_1 (1 - \beta)}$$

$$a_k = \frac{2(E_1 - E_2)}{\pi k} \sin(\lambda_k x), \quad c_k = \frac{2P}{\pi k} \sin(\lambda_k x) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) в (2.2), после некоторых преобразований получим:

$$\sum_{k=1}^{k-1} [J(a_{k-n} - a_{k+n}) \lambda_k \lambda_n + (c_{k-n} + c_{k+n})] \lambda_n f_n$$

$$+ [J(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^2 + (2c_0 + c_{2k})] \lambda_k f_k \quad (2.6)$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{\infty} [J(a_{n-k} - a_{n+k}) \lambda_k \lambda_n + (c_{n-k} + c_{n+k}) \lambda_n f_n] = 0$$

Что касается определения мгновенной и длительной критических сил, то это очевидно. Но силы в сечениях зависят от времени и здесь помимо перечисленных критических сил ( $t = 0$  и  $t \rightarrow \infty$ ) есть необходимость введения понятия критического момента времени для заданной силы  $P$  ( $P_{cr}^{0k} \leq P \leq P_{cr}^{kt}$ ). При определении критического момента времени допускается некоторый произвол, исходя из выбора критерия. Можно, например, предполагать, что балка имеет некоторую начальную выправленность и изучать ее дальнейшее развитие и об устойчивости можно судить по допускаемым перемещениям.

Здесь выберем другой путь, используемый, например, в [5,6] для упругого или упруго-пластического удара.

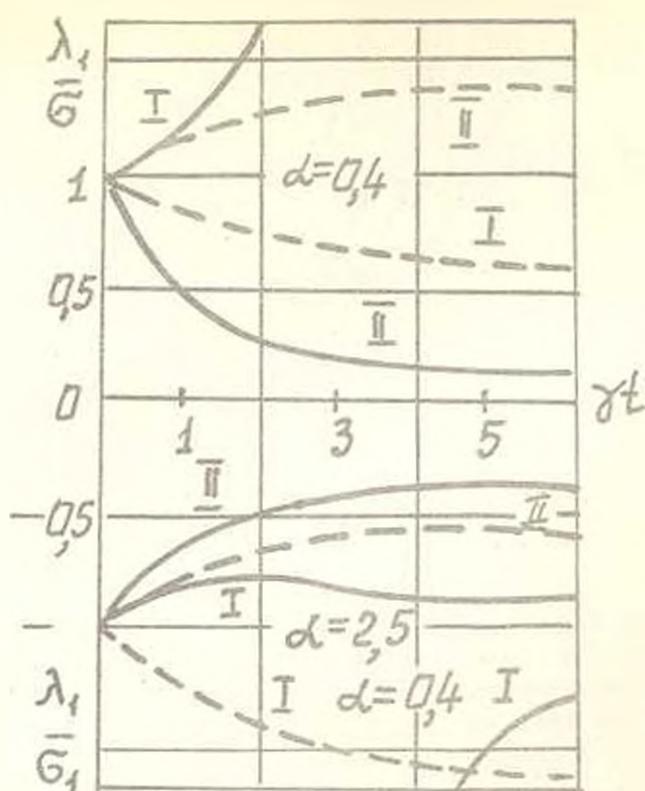
Критическое время определим как наименьшее собственное значение матрицы системы (2.6), где будем заменять  $E_1 \rightarrow E_1 (1 - \Gamma_1^* 1)$ . Тогда коэффициенты будут функциями от  $\Gamma_1^*$  и минимальный корень будет отождествлен с критическим временем потери устойчивости. При таком определении получаются как мгновенная, так и длительная критические силы. Кроме того, это есть фактически обобщение принципа соответствия на случай устойчивости, имеющий ясный физический смысл: критическое время есть то время, при котором, чтобы вывести систему из начального состояния, необходимо наименьшее внешнее воздействие, чем в другой момент времени [6].

Для определения критических моментов потери устойчивости были приведены расчеты для  $\beta = 0.4$ , при  $\alpha = 0.4$  и  $\alpha = 2.5$  для двух вариантов:

$$\text{I случай} \quad \frac{E_1}{E_2} = 3, \quad \frac{E_2}{E_1} = 1.5$$

$$\text{II случай} \quad \frac{E_1}{E_2} = 1.5, \quad \frac{E_2}{E_1} = 3 \quad (2.7)$$

Расчеты производились в первом приближении, так как нас, в основном, интересует качественная картина. Однако следует отметить, что они



Фиг.4

достаточно точные, например, для  $\beta = 0.5$  (это худший случай) и  $\alpha = 0.4$  получаем  $P_{кр} = 3.26 E_2 J \pi^2 l^{-2}$ , а для  $\alpha = 2.5$   $P_{кр} = -8.16 E_2 J \pi^2 l^{-2}$  (для сравнения см. фиг.2).

На фиг.4 приведены относительные напряжения  $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1(t) / \sigma_1^{кр}$  (пунктирные линии) и необходимые для потери устойчивости относительные силы  $\lambda_1 = P / P_{кр}^{кр}$  в зависимости от времени (сплошные линии). Эти кривые можно интерпретировать так: какова должна быть приложенная сила, чтобы потеря устойчивости происходила в данный момент времени? Несмотря на то, что эти отношения всегда положительны, кривые для  $\alpha = 2.5$  нанесены для отрицательных ординат, тем самым подчеркивая, что минимальная мгновенная критическая сила получается при действии силы, обратно направленной по отношению к фиг.1 (от  $E_2$  к  $E_1$ ).

Как видно из фиг. 4, при  $\alpha = 2.5$  случая I для  $\gamma t > 3$  необходимая для потери устойчивости сила больше, чем в некотором интервале предыдущих моментов времени. Более интересен случай I при  $\alpha = 0.4$ . Здесь необходимая мгновенная критическая сила меньше длительной (меняется направление).

Факт, что вязкоупругий стержень может быть устойчивым, в то время как упругий - неустойчив, обнаружен также в [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lee G.E. and Reissner E. Note on a Problem of Beam Buckling - Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 1975, vol.26, pp.839-843.
2. Исабекян Н.Г. Об одной задаче устойчивости стержня, изготовленного из разномодульного материала. Межвуз. сб. научн. тр., Механика, 1986, вып.4, с.97-101.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем - М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
4. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. - М.: Наука, 1977. 383 с.
5. Мовсисян Л.А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т.24, 1, с.38-50.
6. Мовсисян Л.А. К устойчивости упругопластических стержней при ударных нагрузках. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1986, т.39, 2, с.15-23.
7. Дроздов А.Д., Колмановский В.Б. Устойчивость вязкоупругих неоднородно стареющих стержней при заданном продольном перемещении концов. - Изв. АН СССР МТТ, 1987, 1, с.107-113.

Институт механики АН Армении  
Поступила в редакцию 25.10.1990