УДК 532.517.2

ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА И ТЕПЛОТДАЧА СТРУКТУРНОЙ
НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

Дается решение задачи Куэтта в случае несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений. Рассмотрено распределение температуры в случае вынужденного коллективного течения вязкой несжимаемой несимметричной жидкости. Показано, что выделение тепла больше, чем для классических ньютоновских жидкостей, где внутреннее вращение не учитывается.

Задачу о движении жидкости между двумя параллельными плоскими стенками, из которых одна покоится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью (течение Куэтта) рассмотрена в работе [1]. В работе [2] рассмотрено распределение температуры для течения Куэтта. Вышеуказанные решения были основаны на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна на случаях, когда характерный размер системы (расстояние между плоскими стенками) сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде [3].

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметричных жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать не-ньютоновские поведения реальных жидкостей. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое — угловые вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения. В

* К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в [3].

динамике структурных несимметричных жидкостей вращательные степени свободы учитываются путем введения в законы сохранения внутреннего «спиного» момента количества движения [3—12]. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В работе [13] в рамках модели [14] рассматривался нагрев микрополяридной жидкости за счет вязкой диссипации энергии при ее течении в плоском канале, когда одна из пластины движется относительно другой с постоянной скоростью, в случае нулевого перепада давления (простое течение Куэтта). Найдены выражения для полей скорости и микровращения, а также для функции вязкой диссипации энергии.

В настоящей работе дается решение задачи Куэтта в случае несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений. Рассмотрено распределение температуры с учетом тепла, возникающего вследствие трения.

1. Основные уравнения движения

Общая система уравнений вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [3, 6]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla \vec{v})^d + \nu_r \nabla \times [2\vec{\omega} - \nabla \langle \vec{v} \rangle] + \vec{f} \\ I \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}) + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^d + \\ &+ 2c_a \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^a + \vec{c} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ — массовая плотность, p — давление, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$ — вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_0 , c_a , c_d — коэффициенты моментной вязкости, $d(\dots)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, $(\nabla \vec{v})^d$ и $(\nabla \vec{\omega})^d$ — симметричные части соответствующих диад, $(\nabla \vec{v})^a$ и $(\nabla \vec{\omega})^a$ — антисимметричные диады, $\vec{f}$ — вектор массовых сил, $\vec{c}$ — вектор массового момента.

К активным массовым силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу, возникающую вследствие изменений объема, связанных с нагреванием.

В работе [1] показано, что массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения лишь в том случае, если соотношения между числом Грасгофа $Gr = \frac{g \beta L^3 (\Delta T)_0}{\nu^2}$ и числом Рейнольдса $R = \frac{V_0 L}{\nu}$ равно

$$Gr \approx R^2$$

Здесь g — ускорение свободного падения, β — коэффициент кубического расширения, $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$ — разность температур тела (стенки) и жидкости, L — характерная длина, V_0 — характерная скорость.

Такое соотношение между числом Грасгофа и числом Рейнольдса может существовать только при очень малых скоростях течения и значительных разностях температур.

Анализ системы уравнений движения (1.1) показывает, что в случае модели структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений, учитывающей внутренние степени свободы, массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения, если $Gr \approx R^2$, то есть учет вращения частицы жидкости не приносит ничего нового в нем.

Таким образом, архимедову подъемную силу в уравнениях (1.1) можно не учитывать при умеренно больших скоростях (при больших числах Рейнольдса) и при малых разностях температур [1]. Известно, что такие течения называются вынужденными конвективными течениями [1]. В случаях, когда архимедову подъемную силу в уравнениях движения (1.1) можно отбросить, а вязкости считать не зависящими от температуры, распределение скоростей становится независимым от распределения температур.

2. Течение Куэтта

Особенно простое точное решение системы уравнений (1.1) получается для течения Куэтта, то есть для установившегося ламинарного течения между двумя параллельными плоскими стенками, из которых одна покоится, а другая движется в своей собственной плоскости с постоянной скоростью U (фиг. 1). Пусть расстояние между стенками равно h , скорость u направлена по оси x , составляющие скорости v и w всюду равны нулю, всюду равны нулю и составляющие угловой скорости ω_x, ω_y . Имеем

$$\begin{aligned} v=w=0, \quad u=u(y) \\ \omega_x=\omega_y=0, \quad \omega_z=\omega(y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этом случае уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно

$$\omega = \frac{1}{2\tau} \frac{dp}{dx} \left(\frac{\text{sh}ky}{\text{sh}kh} h - y \right) - \frac{1}{2} C \left[\text{ch}ky - \frac{\text{ch}kh - 1}{\text{sh}kh} \text{sh}ky - 1 \right] \quad (2.6)$$

Здесь

$$k = \frac{N}{l}, \quad N = \left(\frac{\tau_r}{\tau_1 + \tau_r} \right)^{1/2}, \quad l = \left(\frac{c_a + c_d}{4\tau_1} \right)^{1/2}$$

а постоянная интегрирования C дается соотношением

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\tau} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{\frac{h}{2} - \frac{N^2 \text{ch}kh - 1}{k \text{sh}kh}} \right) \quad (2.7)$$

В дальнейшем, для простоты решения, рассмотрим случай нулевого перепада давления (течение чистого сдвига). Тогда, для распределения поперечной скорости u и скорости вращения частицы ω будем иметь

$$u^* = \frac{u}{U} = C^* \left\{ y^* - \frac{N^2}{\lambda} \left[\text{sh}\lambda y^* - \frac{(\text{ch}\lambda y^* - 1)(\text{ch}\lambda - 1)}{\text{sh}\lambda} \right] \right\} \quad (2.8)$$

$$\omega^* = \frac{\omega h}{U} = \frac{1}{2} C^* \left[\text{ch}\lambda y^* - \frac{\text{ch}\lambda - 1}{\text{sh}\lambda} \text{sh}\lambda y^* - 1 \right] \quad (2.9)$$

где

$$C^* = \frac{1}{1 - \frac{2N^2 \text{ch}\lambda - 1}{\lambda \text{sh}\lambda}}, \quad \lambda = kh, \quad y^* = \frac{y}{h}$$

В предельном случае $N \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$ выражение безразмерной поперечной скорости (2.8) переходит к классическому решению

$$\lim_{\substack{N \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow \infty}} u^* = y^* \quad (2.10)$$

и (2.9) даст $\omega = 0$.

λ — действительное число, характеризующее взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости, так как τ , τ_r , c_a , c_d неотрицательны.

Для различных значений N (при $\lambda = 0.5$) на фиг. 1 изображено отличие скорости от классического течения Куэтта.

Как видим, учет несимметричности тензора напряжений жидкости (микроструктуры) приводит к увеличению скорости в прилегающей к движущейся стенке половине и уменьшает в другой половине скорости по сравнению со скоростью течения классической ньютоновской жидкости. Причем, чем больше N , тем больше эти эффекты.

3. Составление уравнения энергии

Из уравнения «первого закона термодинамики» для систем с несимметричным тензором напряжений имеем [3]

$$\rho \frac{de}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} + \rho \Phi + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (3.1)$$

где

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T$$

Здесь e —удельная внутренняя энергия, $\vec{q}$ —вектор потока тепла через границу площади в единицу времени за счет теплопроводности, κ —коэффициент теплопроводности, T —абсолютная температура, Φ —скорость диссипации механической энергии (на единицу массы жидкости), вызываемой вязкостью жидкости.

Для скорости диссипации (в случае плоского течения) имеем [3]

$$\Phi = \nu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} + (c_a + c_d) \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] + \tau_r \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4\omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4\omega^2 \right] \quad (3.2)$$

В том случае, когда скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемыми ими изменениями термодинамических величин можно пренебречь. При определении производных от термодинамических величин в этом случае давление надо считать постоянным. Тогда будем иметь следующее термодинамическое соотношение [16]

$$T \frac{ds}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} \quad (3.3)$$

где s —удельная энтропия, c_p —удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Используя уравнение сохранения энергии (3.1), соотношение (3.3) перепишем в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{1}{c_p} \Phi \quad (3.4)$$

Здесь были использованы также термодинамическое соотношение Гиббса и уравнение неразрывности в форме [17]

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt}, \quad \rho \frac{d(1/\rho)}{dt} = -\nabla \cdot \vec{v}$$

4. Определение распределения температуры

Так как для задачи Куэтта скорость диссипации согласно (3.2) равна

$$\rho \Phi = (\tau + \tau_r) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \tau_r \left(\omega \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2 \right) + (c_a + c_d) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2$$

то уравнение для распределения температуры (уравнение энергии (3.4)) примет вид

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + (\eta_1 + \eta_r) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\ + 4\eta_r \left(\omega \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2 \right) + (c_a' + c_d') \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Очень простое решение для распределения температуры получается при следующих граничных условиях, определяющих температуру на стенках:

$$\begin{aligned} T = T_0 \quad \text{при } y=0 \\ T = T_1 \quad \text{при } y=h \end{aligned} \quad (4.2)$$

то есть при постоянном значении температуры вдоль каждой стенки.

Уравнение (4.1) при граничных условиях (4.2) дает для распределения температуры решение, не зависящее от x . Поскольку $v=0$, а T не зависит от x , вся левая часть уравнения (4.1), представляющая перенос тепла посредством конвекции, становится [1, 18]. Следовательно, возникающее при течении поле температуры обусловлено только теплопроводностью в поперечном направлении и теплом, образующимся вследствие трения. Отбросив в уравнении (4.1) члены, равные нулю, получим

$$\kappa \frac{d^2 T}{dy^2} = -(\eta_1 + \eta_r) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - 4\eta_r \left(\omega \frac{du}{dy} + \omega^2 \right) - (c_a' + c_d') \left(\frac{d\omega}{dy} \right)^2 \quad (4.3)$$

Вычисляя из (2.8) и (2.9) значения ω^2 , производных $\frac{du}{dy}$, $\frac{d\omega}{dy}$ и подставляя в уравнение (4.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{\chi C^{*2} U^2}{2\kappa(T_1 - T_0)} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) + \frac{\eta C^{*2} U^2}{2\kappa(T_1 - T_0)} \frac{N^2}{U^2} \left[4 \left(\operatorname{ch} \lambda \frac{y}{h} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{y}{h} \operatorname{ch} \lambda \right) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch} 2\lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \operatorname{ch} 2\lambda \right) \right] \left[1 + \frac{(\operatorname{ch} \lambda - 1)^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \right] + \\ + \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1}{\operatorname{sh} \lambda} \left(\operatorname{sh} 2\lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \operatorname{sh} 2\lambda \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \left[7 - \frac{(\operatorname{ch} \lambda - 1)^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \right] - \\ - \frac{4N^2}{1 - N^2} \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1}{\operatorname{sh} \lambda} \left(\operatorname{sh} \lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \operatorname{sh} \lambda \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Введя обозначение $T_1 - T_0 = (\Delta T)_0$, представим безразмерный параметр

$$\frac{\chi U^2}{\kappa(T_1 - T_0)}$$

в виде произведения [1]

$$\frac{\gamma U^2}{2(T_1 - T_0)} = \frac{\gamma c_p}{2} \frac{U^2}{c_p(\Delta T)_0} = \text{Pr} \cdot \text{Ec}$$

Следовательно, этот параметр может быть выражен через число Прандтля и через число Эккерта. Таким образом, в рассматриваемом случае, в котором конвекция тепла отсутствует, температурное поле зависит только от произведения $\text{Pr} \cdot \text{Ec}$.

Окончательно для распределения температуры получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = & \frac{y}{h} + \frac{1}{2} \text{Pr} \cdot \text{Ec} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{1}{2} \text{Pr} \cdot \text{Ec} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) (C^{**} - 1) + \\ & + \frac{1}{2} C^{**} \text{Pr} \cdot \text{Ec} \frac{N^2}{\lambda^2} \left\{ 4 \left(\text{ch} \lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \text{ch} \lambda \right) - \frac{1}{2} \left(\text{ch} 2\lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \text{ch} 2\lambda \right) \right\} \left[1 + \right. \\ & + \left. \frac{(\text{ch} \lambda - 1)^2}{\text{sh}^2 \lambda} \right] + \frac{\text{ch} \lambda - 1}{\text{sh} \lambda} \left(\text{sh} 2\lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \text{sh} 2\lambda \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \left[7 - \frac{(\text{ch} \lambda - 1)_x}{\text{sh}^2 \lambda} \right] - \\ & - \frac{4N^2}{1 - N^2} \frac{\text{ch} \lambda - 1}{\text{sh} \lambda} \left(\text{sh} \lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \text{sh} \lambda \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.5) видно, что распределение температуры складывается из двух частей. Первая часть соответствует решению классической ньютоновской жидкости [1], на эту часть налагается распределение, зависящее от тепла, возникающего вследствие несимметричности жидкости, то есть учета внутреннего вращения.

В предельном случае $N \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$ выражение распределения температуры (4.4) сводится к классическому решению для течения Куэтта, полученное Г. Шлихтингом [1]

$$\lim_{\substack{N \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow \infty}} \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{\gamma U^2}{2\alpha(T_1 - T_0)} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Фиг. 2

Распределение температуры при течении Куэтта с учетом тепла, возникающего вследствие трения, для различных значений безразмерного параметра связи λ' (при $\nu=0,5$, $PrEc=0; 4; 8$) изображено на фиг. 2.

Фиг. 3.

Как видно из фиг. 2, выделение тепла здесь больше тепла для классических ньютоновских жидкостей.

На фиг. 3 показаны графики распределения безразмерной температуры при различных значениях параметра λ (при $N^2=0,5$, $Pr \cdot Ec = 0; 4; 8$).

Из графика видно, что чем ниже значение λ , тем более ярко выражены эффекты учета подструктуры жидкости на распределения температуры по сечению течения.

THE COUETTE FLOW AND HEAT TRANSFER OF THE STRUCTURAL NONSYMMETRIC FLUID

I. G. PETROSIAN

ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԱՅԻՆ ՈՂ ՍԻՄՏՐԻԿ ՀՆԱՌԻԿԻ ԿՈՒԵՏՏԻ ՀՈՍՔԸ ԵՎ ԶԵՐՄԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆԸ

Է. Գ. ՊԵՏՐՈՍԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Վ Ո Մ

Տրված է Կուետտի խնդրի լուծումը ոչ սիմետրիկ լարման թենզորով անսիզմետրի կառուցվածքային հեղուկի դեպքում: Դիտարկված է ջերմաստիճանի

բաշխումը մածուցիկ անսեղմելի ոչ սիմետրիկ հեղուկի ստիպողական կոնվեկտիվ հոսքի դեպքում: Ցույց է արված, որ ջերմության անշատումը ազնվին է, քան նյութոսնյան դասական հեղուկների նմանը, որ ներքին պոսույտը հաշվի չի առնվում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шлихтинг Л. Теория пограничного слоя.—М: Наука, 1974. 711 с.
2. Schlichting H. Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung.—ZAMM, 1951, Band 31, p. 78—83.
3. Петросян Л. Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений.—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. 308 с.
4. Grad H. Statistical mechanics—Thermodynamics and fluid dynamics of systems, with an arbitrary number of Integrals.—Commun. pure. appl. math., 1952, vol. 5, № 4, p. 455—494.
5. Азро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметрическая гидромеханика.—ИММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 297—308.
6. Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т. О неизоэтермической модели несимметричных жидкостей.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, с. 132—136.
7. Петросян Л. Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. 1. Основные уравнения.—Ученые записки, ЕГУ, 1976, № 3, с. 56—63.
8. Петросян Л. Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. 2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты.—Ученые записки, ЕГУ, 1977, № 2, с. 74—80.
9. Петросян Л. Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. 3. Пристеночный и приосевой эффекты в цузеялевском течении сусеяяни.—Ученые записки, ЕГУ, 1978, № 2, с. 46—54.
10. Петросян Л. Г. К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей.—Прикладная механика, 1976, т. 12, № 11, с. 103—109.
11. Петросян Л. Г. О модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений.—ЖГФ, 1979, т. 49, вып. 3, с. 481—487.
12. Петросян Л. Г. К построению неэтермической модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений.—Прикладная механика, 1980, т. 16, № 4, с. 108—114.
13. Мисун Н. П., Прохоренко П. П. Нагрев микрополяриной жидкости вследствие вязкой диссипации энергии в каналах. Ч. II. Течение Куэтта.—Инженерно-физический ж., 1981, т. XVI, № 3, с. 393—398.
14. Eringen A. C. Theory of micropolar fluids.—J. Math. Mech., 1966, vol. 18, № 1, p. 1—18.
15. Петросян Л. Г. Об одной задаче пограничного слоя с моментными напряжениями.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 3, с. 47—57.
16. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика.—М.: Наука, 1986. 736 с.
17. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика.—М.: Мир, 1964. 456 с.
18. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене.—М.: Изд. иностран. лит., 1958. 366 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 4.X.1990