

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ ТОКОНЕСУЩЕЙ НИТИ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

КАЗАРЯН К. Б.

Выведены натуральные уравнения равновесного состояния нити, определяющие функции кривизны и кручения нити. Показано, что нить принимает форму различных винтовых линий. Определены условия, при которых возможны бифуркации равновесных состояний нити.

В работах [1, 2] исследована задача равновесия упругой нити в токе по внешнему магнитному полю. На основе методов теории бифуркации определены нетривиальные равновесные состояния и условия, при которых имеют место бифуркации равновесных состояний. В настоящей работе предложен иной подход к решению аналогичной задачи, связанной с определением натуральных уравнений пространственной кривой, соответствующей равновесным состояниям нити. Определены функции кривизны и кручения нити и показано, что нить под действием ponderomotorной силы взаимодействия тока с внешним магнитным полем может принять конечное число различных равновесных состояний в виде винтовых линий. Винтовые линии обвиваются вокруг цилиндра, образующие которого параллельны направлению вектора внешнего магнитного поля.

В работе [3] исследованы линейные колебания токонесущей нити в магнитном поле протекающего по ней тока. В [4] изучены нелинейные хаотические колебания токонесущей нити, растянутой механической силой и находящейся в продольном магнитном поле, параллельном току.

§1. Рассмотрим упругую гибкую нить длины L . По нити протекает электрический ток силы I_0 . Нить находится во внешнем магнитном поле с постоянным вектором индукции $\vec{B}_0$. Нить закреплена в двух неподвижных точках, расстояние между которыми есть M_0 . Эффекты самовоздействия токонесущей нити [3], обусловленные взаимодействием тока с собственным магнитным полем, не принимаются во внимание. Единственной силой, действующей на нить, является ponderomotorная сила Ампера (сила на единицу длины)

$$\vec{F}_0 = I_0 \vec{B}_0 \quad (1)$$

Мы будем исходить из следующих векторных уравнений статики нити [5]:

$$\frac{d\vec{Q}}{ds} + \vec{F}_0 = 0; \quad \vec{Q} \times \vec{\tau} = 0; \quad (\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 1 \quad (1.2)$$

В (1.2) $\vec{Q}$ есть вектор упругих внутренних натяжений (силы), s — координата длины дуги вдоль нити, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ есть единичный вектор касательной к нити, $\vec{r}$ — радиус-вектор точек нити. Так как вектор электрического тока всегда направлен по касательной к нити, то

$$\vec{J}_0 = i_0 \vec{\tau}$$

Из второго уравнения системы (1.1) имеем

$$\vec{Q} = Q_0 \vec{\tau} \quad (1.3)$$

Таким образом, нам следует решить векторное уравнение

$$\frac{d(Q_0 \vec{\tau})}{ds} + J_0 (\vec{\tau} \times \vec{B}_0) = 0 \quad (1.4)$$

со следующими граничными условиями закрепления нити:

$$\vec{\tau}(0) = 0; \quad \vec{r}(L) = \vec{M}_0 \quad (1.5)$$

Умножая уравнение (1.4) скалярно на вектор $\vec{\tau}$, получим

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d(Q_0 \vec{\tau})}{ds} = \vec{\tau} \cdot \frac{dQ_0}{ds} + \frac{Q_0}{2} \frac{d\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}{ds} = 0$$

откуда, в силу $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$, получим, что $Q_0 = \text{const}$. Умножая уравнение (1.4) скалярно на $\vec{B}_0$, получим

$$\left(\vec{B}_0 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (B_0 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 0; \quad \vec{B}_0 \cdot \vec{\tau} = \text{const} \quad (1.6)$$

Далее, умножая уравнение (1.4) векторно на $\vec{B}_0$, получим

$$\frac{d(\vec{\tau} \times \vec{B}_0)}{ds} + \frac{J_0}{Q_0} [(\vec{\tau} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 - B_0^2 \vec{\tau}] = 0 \quad (1.7)$$

Из (1.7) и (1.6) получим следующее уравнение относительно вектора $\vec{\tau} \times \vec{B}_0$:

$$\frac{d^2(\vec{\tau} \times \vec{B}_0)}{ds^2} + \lambda^2 (\vec{\tau} \times \vec{B}_0) = 0; \quad \left(\lambda^2 = \frac{J_0^2 B_0^2}{Q_0^2} \right) \quad (1.8)$$

Решением (1.8) является следующая функция:

$$\vec{B}_0 = \vec{A}_1 \sin s + \vec{A}_2 \cos s \quad (1.9)$$

В (1.9) $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ есть произвольные постоянные векторы, перпендикулярные вектору $\vec{B}_0$, $\vec{B}_0 \cdot \vec{A}_1 = \vec{B}_0 \cdot \vec{A}_2 = 0$. Принимая во внимание (1.4) и (1.9), получим следующее решение для вектора $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \rho \vec{B}_0 + \vec{A} B_0 \sin s + (\vec{A} \times \vec{B}_0) \cos s$$

где ρ есть произвольный скаляр, $\vec{A}$ есть произвольный вектор, перпендикулярный к $\vec{B}_0$, $(\vec{B}_0 \cdot \vec{A}) = 0$.

С учетом граничных условий (1.5) получим следующее некое решение для радиус-вектора:

$$\vec{r} = \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0}{B_0^2 L} s + \frac{\vec{F}}{2 \sin \frac{iL}{2}} \left| \sin \frac{iL}{2} + \right. \quad (1.10)$$

$$\left. + \sin \left(s - \frac{iL}{2} \right) \right| + \frac{\vec{F} \times \vec{B}_0}{2 B_0 \sin \frac{iL}{2}} \left[\cos \left(s - \frac{iL}{2} \right) - \cos \frac{iL}{2} \right]$$

где

$$\vec{F} = \vec{M}_0 - \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)}{B_0^2} \vec{B}_0$$

Отметим, что $(\vec{F} \cdot \vec{B}_0) = 0$, и, следовательно, функция $\vec{r}(s)$ выражается посредством тройки взаимно-перпендикулярных векторов.

Для функции $\vec{r}(s)$ имеем

$$\begin{aligned} \vec{r} = & \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)}{B_0^2 L} + \frac{\vec{F}}{2 \sin \frac{iL}{2}} \cos \left(s - \frac{iL}{2} \right) - \\ & - \frac{(\vec{F} \times \vec{B}_0)}{2 B_0 \sin \frac{iL}{2}} \sin \left(s - \frac{iL}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из условия $\vec{r}^2 = 1$ получим следующее уравнение, определяющее параметр i (натяжение Q_0):

$$\frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)^2}{L^2 B_0^2} + \frac{(\vec{F} \times \vec{B}_0)^2}{4 B_0^2} \csc^2 \left(\frac{iL}{2} \right) = 1 \quad (1.12)$$

§2. На основе формул Френе для пространственной кривой для функций кривизны $K(s)$ и кручения $\chi(s)$ имеем

$$K(s) = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right| = \frac{(\vec{M}_0 \times \vec{B}_0)^2}{2 B_0^2 \sin^2 \frac{iL}{2}} \quad (2.1)$$

$$\chi(s) = \frac{\frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{d^3r}{ds^3} \right)}{\left(\frac{d^2r}{ds^2} \right)^2} = \frac{(M_0 \cdot B_0)L}{B_0 L}$$

Как видно из (2.1), функции кривизны и кручения не зависят от s , то есть они являются постоянными вдоль длины нити.

Исходя из постоянства этих функций, мы приходим к выводу, что нить в общем случае представляет собой в пространстве винтовую линию, вид которой определяется посредством параметра λ .

Рассмотрим отдельно конкретные частные случаи. Обозначим через Θ угол между векторами B_0 и M_0 . Запишем условие (1.12) в виде

$$\frac{\gamma^2}{\sin^2 \gamma} \sin^2 \Theta = \frac{L^2}{M_0^2} - \cos^2 \Theta; \quad \left(\gamma = \frac{M_0}{2} \right) \quad (2.2)$$

При $\Theta \rightarrow 0$ (что соответствует случаю параллельности вектора магнитного поля линии, соединяющей точки закрепления) правая часть уравнения (2.2) стремится к $L^2/M_0^2 - 1$, и, следовательно, $\gamma \rightarrow m$ ($m=1; 2; 3, \dots$) так, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow m, \Theta \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma^2}{\sin^2 \gamma} \sin^2 \Theta \right) = \frac{L^2}{M_0^2} - 1 \quad (2.3)$$

Из (2.3) для функций K , χ имеем

$$K = \frac{2M_0 \pi m}{L^2} \sqrt{\frac{L^2}{M_0^2} - 1}; \quad \chi = \frac{2M_0 \pi m}{L^2}$$

Для функции $r(s)$ в этом частном случае имеем следующее решение

$$r(s) = \frac{M_0 \pi}{L} \hat{k} + \left\{ \sqrt{1 - \frac{M_0^2}{L^2}} \frac{L}{2\pi m} \{ i \sin(s - \pi m) + \right. \quad (2.4) \\ \left. + \hat{j} [\cos(s - \pi m) + (-1)^{m-1}] \} \right\}$$

где $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ есть взаимно-перпендикулярные единичные векторы, причем вектор $\hat{k}$ направлен вдоль магнитного поля B_0 .

Таким образом, в продольном магнитном поле нить принимает форму винтовой линии, обвитой вдоль цилиндра, образующие которого параллельны направлению магнитного поля. Причем имеется бесконечное дискретное множество бифуркационных состояний нити с натяжением $Q_0 = L B_0 L / 2\pi m$. Этот же результат получен в [1] на основе другого подхода. При $M_0 = L$ мы имеем тривиальное решение $r = M_0 \epsilon (L B_0)^{-1} B_0$ при всех значениях параметра ϵ .

В случае, когда магнитное поле перпендикулярно вектору

$\vec{M}_0(\vec{B}_0 \cdot \vec{M}_0) = 0$, функция кручения нити становится равной нулю, и, следовательно, нить является плоской кривой, а именно, дугой окружности с радиусом

$$R = L^2 \sin \eta / 2 M_0 \gamma^2 \quad (2.5)$$

В (2.5) η определяется из уравнения

$$\frac{\sin^2 \eta}{\gamma^2} = \frac{M^2}{L^2} \quad (2.6)$$

Так как для дуги окружности с заданными длиной дуги L и длиной хорды M , радиус определяется однозначным образом, то из корней уравнения (2.6) имеет смысл только первый наименьший корень $\eta_0 < \pi$.

В остальных случаях, когда $(\vec{B}_0 \cdot \vec{M}_0) \neq 0$; $(\vec{B}_0 \times \vec{M}_0) \neq 0$, нить также представляет собой винтовую линию, намотанную на цилиндр с образующими, параллельными вектору $\vec{B}_0$.

Кривизна и кручение нити определяются по формулам

$$K = \frac{2 M_0 \sin \Theta}{L^2} \frac{\gamma^2}{\sin \eta}; \quad \gamma = \frac{2 M_0 \gamma \cos \Theta}{L^2}$$

где η удовлетворяет уравнению (2.2).

Уравнение (2.2) имеет единственный корень, если

$$\frac{M_0^2 \sin^2 \Theta}{L^2 - M_0^2 \cos^2 \Theta} > \cos^2 \gamma_1 = 0,046$$

где γ_1 есть наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} \eta = \gamma_1$ ($\gamma_1 = 4,494$).

В остальных случаях, когда

$$\cos^2 \gamma_{n-1} > \frac{M_0^2 \sin^2 \Theta}{L^2 - M_0^2 \cos^2 \Theta} > \cos^2 \gamma_n \quad (n \geq 1)$$

уравнение (2.2) имеет $2n-1$ корней.

Таким образом, в этих случаях мы имеем дело с многозначными равновесными состояниями нити, то есть при заданных значениях поперечной силы $F_0 = J_0 B_0$, длин L и M_0 нить может принять различные равновесные состояния в виде винтовой линии с натяжениями, для каждого состояния равными

$$Q_0 = \frac{J_0 B_0 L}{2 \gamma_n}$$

С другой стороны, в равновесных состояниях нити может быть реализована такая ситуация, что при различных значениях поперечной силы F_0 , удовлетворяющих условию

$$F_0 \cos^2 \gamma_n = \alpha_n = \text{const} \quad (n=1; 2; 3, \dots, 2n-1)$$

для разных реализуемых состояний равновесия в нити натяжение будет одинаковым и равным $Q_0 = \alpha_0 L$.

Отметим, что вопрос устойчивости бифуркационных состояний должен быть рассмотрен на основе анализа динамики нити, что требует отдельного изучения.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть угол между векторами $\vec{B}_0$ и $\vec{M}_0$ составляет $\Theta = \pi/6$. Тогда, при $L/M_0 = \sqrt{3}$ нить принимает единственное равновесное состояние с натяжением $Q_0 = J_0 B_0 L/2\alpha_0$; $\gamma_1 = 2,28$. При $L/M_0 = \sqrt{7}$ нить принимает три различных равновесных положения с натяжениями $Q_0 = J_0 B_0 L/2\alpha_0$; $\gamma_1 = 2,58$, $\gamma_2 = 1,12$; $\gamma_3 = 4,91$.

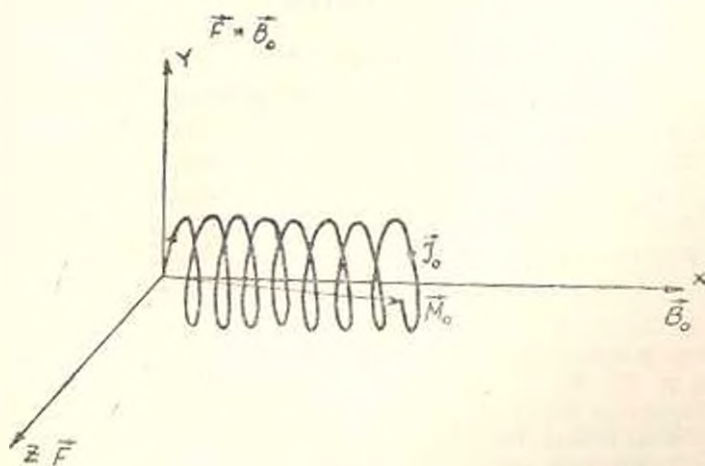
§3. Приведем теперь решение для нити в декартовой системе координат.

Введем в рассмотрение декартовую систему координат с осями $\hat{i}_x, \hat{i}_y, \hat{i}_z$, связанными с векторами $\vec{F}, \vec{F}, \vec{B}_0, \vec{B}_0$ следующим образом:

$$\hat{i}_x = \frac{\vec{B}_0}{B_0}; \quad \hat{i}_y = \frac{\vec{F} \times \vec{B}_0}{|\vec{F} \times \vec{B}_0|}; \quad \hat{i}_z = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \quad (3.1)$$

в этой системе вектор $\vec{M}$ расположен в плоскости (x, z) . Тогда в этой системе решение запишется в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{M_0 \cos \Theta}{2\pi} \\ y &= \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma_1} \{ \cos[\gamma_1^{-1}(\varphi - \pi)] - \cos \gamma_1 \} \\ z &= \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma_1} \{ \sin \gamma_1 + \sin[\gamma_1^{-1}(\varphi - \pi)] \} \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 1.

где φ есть полярный угол $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ в плоскости (y, z) .

Исключив из (3.2) угол φ , мы получим решение пространственной кривой (фиг. 1) в виде функции $w(x) = y(x) + iz(x)$; $i = \sqrt{-1}$, $0 \leq x \leq M_0 \cos \Theta$:

$$w(x) = \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma_1} \left[\exp i \gamma_1 \left(\frac{2x}{M_0 \cos \Theta} - 1 \right) - \exp(i \gamma_1) \right]$$

Длина нити определяется из условия

$$\int_0^L \sqrt{1 + \left| \frac{dw}{dx} \right|^2} dx = l$$

Следует отметить, что если бы мы первоначально рассматривали данную задачу в произвольной декартовой системе координат, ставя целью определить уравнения нити, как функцию от координаты x , то мы бы имели дело с системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

В заключение укажем, что рассматриваемая задача в некотором смысле аналогична задаче движения заряженной частицы в магнитном поле, уравнения которой имеют вид [6]

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{e}{m_0 c} (\vec{v} \times \vec{B}_0) = 0; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

где e — заряд, m_0 — масса частицы, $\vec{v}$ — скорость частицы.

DETERMINATION OF THE CURRENT-CARRYING THREAD EQUILIBRIUM FORMS IN MAGNETIC FIELD

K. B. KAZARIAN

ՄԱԿՆԻՍԻԿԱԼ ԴԱՇՏՈՒՄ ՀԱՍՏԱՔԱՏԱՐ ԻՅԵՐ ՀԱՎԱՍԱՐԱԾՆԵՐԻ
ՋԵՎԵՐԻ ԲՆՈՐՈՇՈՒՄԸ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ա. Ճ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Արտածված են թելի հավասարակշիռ վիճակի բնական հավասարումները, որոշված են թելի կորույթան և պորման ֆունկցիաները: Յուրջ են տրված, որ թելն բնորոշում է զանազան պատասխանիչ ղեկերի ձև: Արտածված են այն պայմանները, երբ շնարավոր են թելի հավասարակշիռ վիճակների բիֆուրկացիաները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wolfe P. Equilibrium states of an elastic conductor in a magnetic field.—TAMS 278 (1983), p. 377—387.
2. Wolfe P. Bifurcation theory of an elastic conducting wire subject to magnetic Forces.—Technical report, MDS-05-PW, 1R88-65, (1988), p. 22.
3. Nowacki J. P. Vibrating string in a magnetic field.—Int. J. of Appl. electromag-netic in materials, 1, (1990), p. 127—133.
4. Kazarian K. B., Galst'yan V. Ts. Chaotic vibration of a current-carrying string in a magnetic field.—Proc. 28-th Polish solid mechanics conference, (1990), p. 115—117.
5. Савицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978, 221 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.—М.: Изд. «Физико-мат. литер.», 1960, 107 с.