ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 44, № 3, 1991 Механика

УДК 539.374

ОБ ОДНОЙ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

КИРАКОСЯН Р. М.

На примере ортотропных пластин предлагается один вариант уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины, способной учитывать поперечные напряжения при удовлетворении поверхностных условий. Предлагаемая теория является обобщением теории С. А. Амбарцумяна на случай пластин переменной толщины.

Известно, что прочностные и упругие свойства современных материалов в поперечном направлении существенно уступают свойствам в направлении армирования. С другой стороны, оптимальное проектирование приводит к тонкостенным конструкциям переменной толщины. Эти обстоятельства выдвигают на первый план вопросы построения уточненных теорий анизотропных пластин и оболочек переменной толщины. Аналогичные вопросы при постоянной толщине обстоятельно рассмотрены в известных монографиях [1] и [2]. В монографии [3] приведены результаты обширных исследований по уточненной теории пластин и оболочек переменной жесткости, основанной на гипотезе прямой линии.

В настоящей статье на примере ортотропных пластин предлагается один вариант уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины, способной учитывать поперечные касательные напряжения при удовлетворении поверхностных условий. Предлагаемая теория фактически является обобщением теории С. А. Амбарцумяна [2] на случай пластин переменной толщины.

1. Рассмотрим пластинку переменной толщины h, изготовленную из ортотропного упругого материала, главные направления которого параллельны осям прямоугольных декартовых координат x, y, и z. Пусть на пластинку действуют поверхностные нагрузки с интенсивностями $X^{\pm}$, $Y^{\pm}$, $Z^{\pm}$, приведенными к единице площади срединной плоскости $z=0$. Здесь и в дальнейшем знаками «$-$» и «$+$» будем отмечать величины, относящиеся к поверхностям $z=-h/2$ и $z=+h/2$ соответственно. Условия крепления краев пластинки произвольны. Считая, что материал обладает слабыми упругими и прочностными свойствами в поперечном направлении, попытаемся построить для рассматриваемой пластинки переменной толщины уточненную теорию, учитывающую влияния напряжений τ_{xz} и τ_{yz} при удовлетворении соответствующих условий на поверхностях $z=\pm h/2$.

В основу предлагаемой теории ставятся следующие предположения:

а) нормальное к срединной плоскости пластинки перемещение u_z не зависит от координаты z;

б) влияние нормального напряжения σ_z не учитывается;

в) касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} по толщине пластинки меняются по законам квадратных трехчленов

$$\tau_{xz}=\varphi_1+z\varphi_2+z^2\varphi_3, \quad \tau_{yz}=\psi_1+z\psi_2+z^2\psi_3 \tag{1.1}$$

где φ_i и ψ_i — искомые функции координат x, y.

Направляющие косинусы внешних нормалей поверхностей пластинки ν^- и ν^+ определяются формулами [4]

$$l^-=\cos(\nu^-\wedge,x)=l^+=\cos(\nu^+\wedge,x)=-\frac{\dfrac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{4+\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

$$m^-=\cos(\nu^-\wedge,y)=m^+=\cos(\nu^+\wedge,y)=-\frac{\dfrac{\partial h}{\partial y}}{\sqrt{4+\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \tag{1.2}$$

$$n^-=\cos(\nu^-\wedge,z)=-n^+=-\cos(\nu^+\wedge,z)=-\frac{2}{\sqrt{4+\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

На каждой поверхности пластинки необходимо удовлетворить три условия. В силу предположения б) одно из этих условий отпадает, а остальные принимают вид:

$$\begin{aligned}&\sigma_x^{\mp}\frac{\partial h}{\partial x}+\tau_{xy}^{\mp}\frac{\partial h}{\partial y}\pm 2\tau_{xz}^{\mp}=-2X^{\mp}\\ &\tau_{xy}^{\mp}\frac{\partial h}{\partial x}+\sigma_y^{\mp}\frac{\partial h}{\partial y}\pm 2\tau_{yz}^{\mp}=-2Y^{\mp}\end{aligned} \tag{1.3}$$

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды при отсутствии объемных сил имеют вид [2]

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$$

С учетом (1.1) и обобщенного закона Гука ортотропного материала можно написать:

$$e_{xz}=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=a_{55}\varphi_1+za_{55}\varphi_2+z^2a_{55}\varphi_3$$

$$e_{yz}=\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=a_{44}\psi_1+za_{44}\psi_2+z^2a_{44}\psi_3 \qquad (1.5)$$

где a_{ij} — упругие постоянные материала, w — прогиб, u_x и u_y — перемещения пластинки вдоль осей x и y соответственно.

В рамках классической теории упругости законы распределения касательных напряжений (1.1) соответствуют линейному изменению напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}, а следовательно, и деформаций e_x, e_y, e_{xy} по координате z. Соблюдая это соответствие и имея в виду (1.5), получим:

$$u_x=u-z\frac{\partial w}{\partial x}+za_{55}\varphi_1, \qquad u_y=v-z\frac{\partial w}{\partial y}+za_{44}\psi_1$$

$$e_x=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+za_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad e_y=\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+za_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} \qquad (1.6)$$

$$e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+z\left(a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_x=B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial v}{\partial y}-z\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-B_{11}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-B_{12}a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)$$

$$(1.7)$$

$$\sigma_y=B_{22}\frac{\partial v}{\partial y}+B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}-z\left(B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-B_{12}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-B_{22}a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xy}=B_{66}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-z\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\right]$$

Здесь u, v — соответствующие перемещения срединной плоскости пластинки, B_{ij} — коэффициенты, которые выражаются через упругие постоянные материала с помощью известных формул [2].

На основе (1.1) и (1.7) внутренние усилия и моменты пластинки примут вид:

$$T_x=h\left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad T_y=h\left(B_{22}\frac{\partial v}{\partial y}+B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$S=B_{66}h\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad N_x=\frac{h}{12}\left(12\varphi_1+h^2\varphi_3\right)$$

$$N_y=\frac{h}{12}\left(12\psi_1+h^2\psi_3\right) \qquad (1.8)$$

$$M_x=\frac{h^3}{12}\left(-B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{11}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+B_{12}a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)$$

$$M_y=\frac{h^3}{12}\left(-B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+B_{22}a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)$$

$$H = B_{66}\frac{h^3}{12}\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + a_{44}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) \tag{1.9}$$

2. Выражения расчетных величин пластинки содержат девять неизвестных функций— φ_i, ψ_i $(i=1, 2, 3)$ и перемещения срединной плоскости u, v, w. Для определения этих неизвестных необходимо составить девять независимых уравнений со своими граничными условиями. Пять из них получаются из уравнений равновесия дифференциального элемента срединной плоскости [2]

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = -X_2, \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = -Y_2 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -Z_2, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = N_x - hX_1$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = N_y - hY_1$$

где

$$X_1 = \frac{X^+ - X^-}{2}, \quad Y_1 = \frac{Y^+ - Y^-}{2}$$

$$X_2 = X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \tag{2.2}$$

Остальные четыре уравнения получаются из поверхностных условий (1.3). Разрушающая система уравнений распадается на две самостоятельные системы, одна из которых относится к плоской задаче, а другая—к задаче изгиба пластинки. Эти системы имеют вид:

а) Плоская задача.

Уравнения равновесия—

$$h\left[B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + B_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} = -X_2 \tag{2.3}$$

$$h\left[B_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + B_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + \left(B_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} + B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x} = -Y_2 \tag{2.4}$$

Из поверхностных условий следует

$$\varphi_2 = \frac{1}{h}\left[X_2 + \left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right] \tag{2.5}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{h}\left[Y_2 + \left(B_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} + B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

б) задача изгиба.

Уравнения равновесия—

$$3(4\varphi_1+h^2\varphi_3)\frac{\partial h}{\partial x}+3(4\psi_1+h^2\psi_3)\frac{\partial h}{\partial y}+12h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)+ \tag{2.6}$$
$$+h^3\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right)=-12Z_1$$

$$h^3\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-B_{11}a_{55}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}-B_{66}a_{55}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}-\right.$$
$$\left.-a_{44}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial y}\right]+3h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\right.\right.$$
$$\left.-B_{11}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-B_{12}a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+B_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\right. \tag{2.7}$$
$$\left.\left.-a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right]=12X_1-12\varphi_1-h^2\varphi_3$$

$$h^3\left[B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-B_{22}a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-B_{66}a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-a_{55}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right]+3h\left[\left(B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\right.\right.$$
$$\left.-B_{12}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-B_{22}a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+B_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\right. \tag{2.8}$$
$$\left.\left.-a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right]=12Y_1-12\psi_1-h^2\psi_3$$

Из поверхностных условий следует

$$\varphi_3=\frac{1}{h^2}\left\{4X_1-4\varphi_1-h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-B_{11}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-B_{12}a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+B_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right]\right\} \tag{2.9}$$
$$\psi_3=\frac{1}{h^2}\left\{4Y_1-4\psi_1-h\left[\left(B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-B_{12}a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-B_{22}a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+B_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right]\right\}$$

Подставляя (2.9) в (2.6)—(2.8), получим

$$h^3\left\{\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]\frac{\partial h}{\partial x}+\left[B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]\frac{\partial h}{\partial y}\right\}+h\left[(C_xB_{11}+C_yB_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right. \tag{2.10}$$

$$
h^3\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4B_{66}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-
$$

$$
-h\left\{\left[8+a_{55}h\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\left[8+a_{44}h\left(B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\right.\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\left.+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right\}-2B_{66}h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\left(a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)-16\left(\frac{\partial h}{\partial x}\varphi_1+\frac{\partial h}{\partial y}\psi_1\right)=
$$

$$
=4\left[3Z_2+h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)-X_1\frac{\partial h}{\partial x}-Y_1\frac{\partial h}{\partial y}\right]
$$

(2.11), (2.12) и (2.14) составляют разрешающую систему уравнений задачи изгиба пластинки.

Таким образом, уточненная теория ортотропной пластинки в рассмотренной постановке описывается уравнениями (2.3), (2.4), (2.11), (2.12) и (2.14). Система этих уравнений подобно случаю пластинок постоянной толщины [2] имеет 10-й порядок. В соответствии с этим, на каждой кромке пластинки следует ставить пять краевых условий— два для плоской задачи и три—для задачи изгиба. В качестве этих условий можно взять известные краевые условия уточненной теории пластинок постоянной толщины [2].

В заключении отметим, что если в выражениях σ_x, σ_y, τ_{xy} мы оставили бы члены с множителями z^2 и z^3, то, кроме нарушения положений классической теории упругости, невозможно было бы исключение из поверхностных условий φ_2, φ_3, ψ_2, ψ_3 и общая разрешающая система уравнений имела бы 14-й порядок. В случае же пластинок постоянной толщины учет этих членов не связан с принципиальными осложнениями и не приводит к повышению порядка разрешающей системы.

ON THE ONE IMPROVED THEORY OF ANISOTROPIC PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

R. M. KIRAKOSIAN

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ՄԻ ՃՇԳՐՏՎԱԾ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Օրթոտրոպ սալերի օրինակի վրա առաջարկվում է փոփոխական հաստության անիզոտրոպ սալերի ճշգրտված տեսություն, որը հաշվի է առնում լայնական լարումները՝ ճշգրիտ բավարարելով մակերևութային պայմանները։ Առաջարկվող տեսությունը, փաստորեն, հանդիսանում է Ս. Ա. Համբարձումյանի տեսության ընդհանրացումը փոփոխական հաստության սալերի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек.—М.: Наука, 1974. 448 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин.—М.: Наука, 1987. 360 с.
3. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Теория оболочек переменной жесткости.—Киев: Наукова думка, 1981. 544 с.
4. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.—М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
11.I.1990