ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 44, № 3, 1991 Механика

УДК 550.334

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

АМБАРЦУМЯН В. А., ШЕКОЯН А. В

Рассмотрено распространение упругой волны и ее взаимодействие с неровной поверхностью. Получены формулы для колебаний неровной поверхности в двух случаях, когда на нее падает поперечная и продольная волна. Приведены аналитические выражения для плоской поверхности, которые сравниваются со случаями неровной поверхности.

В настоящее время достаточно полно рассмотрено отражение и преломление сейсмических волн в случае плоской границы [1—4].

Однако длины сейсмических волн обычно сравнимы с характерными размерами неровностей земной поверхности, поэтому модели с плоской земной поверхностью не всегда являются адекватными приближениями. Здесь существенно учитывать «шероховатость» земной поверхности. Вопросы отражения и преломления от неровной поверхности представляют, в частности, практический интерес для инженерной сейсмологии.

В настоящее время работ, где учитывается неровность границ среды, не очень много [6—8].

Целью настоящей работы является как-то дополнить этот пробел, изучая распространение, отражение, преломление от свободной неровной поверхности сейсмической волны, а также колебания неровной поверхности под воздействием сейсмической волны и получить простые выражения для перемещений поверхности Земли, удобные для применения на практике.

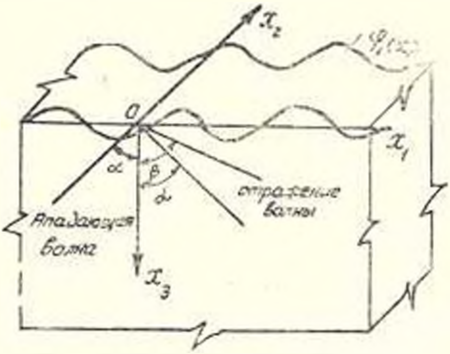
1. *Общие уравнения и постановка задачи*

Рассматривается распространение сейсмической волны в полупространстве с неплоской поверхностью. Предполагается, что среда изотропна и однородна. Предполагается также, что интенсивность сейсмической волны так мала, что можно ограничиться линейной теорией. Задача решается для двумерного случая.

Уравнение границы поверхности задается функцией $x_3=\psi(x_1)$. Твердое тело занимает полупространство $x_3>\psi$.

Предполагается, что под углом α в направлении AO, распространяется гармоническая плоская волна (фиг. 1). Тогда, как известно [9], будут две отраженные волны- одна под углом α, а другая под углов β. Если падающая волна продольная (P-волна), то угол отражения для отраженной P-волны будет α, а для отраженной поперечной волны—β. Когда падающая волна поперечная (SV или SH-волна), тогда отраженная поперечная волна составляет с осью Ox_3 угол α, а отраженная продольная—угол β. Ось Ox_3 направлена в глубь среды.

Уравнения движения упругой среды в потенциалах сводятся к двум следующим уравнениям [9]:



$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=C_1^{-2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}=C_2^{-2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где Φ—потенциал продольной волны, ψ—потенциал поперечной волны, $C_1^2=(\lambda+2\mu)\rho^{-1}$—квадрат скорости продольной волны, $C_2^2=\mu\rho^{-1}$—квадрат скорости поперечной волны, λ и μ—коэффициенты Ламе.

Перемещения выражаются через потенциалы следующим образом:

$$U_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi}{\partial x_3} \tag{1.3}$$

$$U_3=\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \tag{1.4}$$

Для дальнейших расчетов понадобятся также следующие выражения для компонент напряжений:

$$\sigma_{11}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}-2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} \tag{1.5}$$

$$\sigma_{33}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}+\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} \tag{1.6}$$

$$\sigma_{13}=\mu\left(2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\right) \tag{1.7}$$

На поверхности $x_3=\varphi(x_1)$ напряжения исчезают

$$\sigma_{33}=\sigma_{13}=0 \quad \text{при} \quad x_3=\varphi(x_1) \tag{1.8}$$

2. *Решение задачи при малоискривленной границе*

Решить поставленную задачу для произвольной функции φ представляет значительную математическую трудность. Поэтому поставленная задача будет решена для малоискривленной границы, будет использован метод возмущений, изложенный в работе [6]. Суть этого метода заключается в следующем: выбирают малый параметр, разлагают в ряд при $x_3=0$ соответствующие величины в уравнениях (1.8). Таким образом, одна задача сводится к решению ряда задач. Первой задачей считается нулевое решение, соответствующее случаю плоской свободной границы

$$\sigma_{33}=\sigma_{13}=0 \quad \text{при} \quad x_3=0$$

Во второй задаче учитываются вторые члены разложения в граничных условиях (1.8). Это соответствует первому приближению. В третьей задаче, которая соответствует второму приближению, учитываются третьи члены разложения. Аналогичным образом составляются и другие задачи более высоких приближений.

В этой работе будем ограничиваться **первым** приближением.

Предполагается, что: 1) глубина неровностей мала по сравнению с длиной падающей волны, 2) малы наклоны поверхности по отношению к средней плоскости.

Введем местную координатную систему x'_i $(i=1,2,3)$ так, чтобы ось x'_3 была направлена вдоль внутренней нормали к поверхности, а оси x'_1, x'_2 были близки к направлениям соответственно, осей x_1 и x_2. Тогда можно написать

$$x'_i=\alpha_{ik}x_k$$

причем $\alpha_{ii}(i=1,2,3)$ принимаются равными единице, а коэффициенты $\alpha_{ik}(i\neq k)$ считаются малыми первого порядка.

В новой координатной системе x'_i напряжения преобразовываются следующим образом: $\sigma'_{3i}=\alpha_{3m}\alpha_{in}\sigma_{mn}=0$. Написав последнее выражение для σ'_{33} и σ'_{13} до членов первого порядка малости и разлагая последнее в ряд по степеням φ, ограничиваясь членами первого порядка малости, получим следующие соотношения:

$$\sigma'_{33}(0)=-\left(\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}\right)_{x_3=0}\varphi \tag{2.1}$$

$$\sigma'_{13}(0)=\left(\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\right)_{x_3=0}\varphi-(\sigma_{11})_{x_3=0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \tag{2.2}$$

Таким образом, вторая задача сводится к решению системы уравнений (1.1) и (1.2) с неоднородными граничными условиями (2.1) и (2.2). Если в нулевом приближении, в плоскости $x_3=0$, напряжения исчезают, то в первом приближении они не исчезают, но малы и имеют порядок φ.

Решение нулевой задачи известно [9], поэтому приведем лишь окончательные выражения для смещения точек плоскости $x_3=0$, которые необходимы для дальнейших сравнений.

Для падающей продольной волны

$$U_1=i\exp(i\xi)(1+Q_2Q_3^{-1})[k+Q_1(2\mu k)^{-1}]A_{01} \quad \text{при} \quad x_3=0 \tag{2.3}$$

$$U_3=i\exp(i\xi)[k_2(1-Q_2Q_3^{-1})+2kk_3Q_1(k_3\mu Q_3)^{-1}]A_{01} \quad \text{при} \quad x_3=0 \tag{2.4}$$

где

$$Q_1=\lambda(k^2+k_2^2)+2\mu k_2^2, \quad Q_2=2kk_2-k_nQ_1(2\mu kk_3)^{-1}$$

$$Q_3=2kk_2+k_nQ_1(2\mu kk_3)^{-1}, \quad \xi=kx_1-\omega t, \quad k_n=k_3^2-k^2$$

$k_2=k\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $k_3=k\,\mathrm{ctg}\,\beta$ — волновое число падающей волны, ω — частота, t — время, A_{01} — заданная амплитуда падающей волны.

Для падающей поперечной волны:

$$U_1=-ik_3A_{01}[1-Q_2Q_3^{-1}-4k^2(Q_1Q_3)^{-1}\mu k_n]\exp(i\xi) \quad \text{при} \quad x_3=0 \tag{2.5}$$

$$U_3=ikA_{01}[1+Q_2Q_3^{-1}+4k_2k_3\mu k_n(Q_1Q_3)^{-1}]\exp(i\xi) \quad \text{при} \quad x_3=0 \tag{2.6}$$

Приступим к решению задачи первого приближения. Для дальнейших расчетов необходимо преобразовать граничные условия (2.1) и (2.2). Подставляя в правые части выражений (2.1) и (2.2) соотношения (1.6) и (1.7), а потом решения нулевого приближения, формулы (2.1) и (2.2) примут следующий вид:

$$\sigma_{33}(0)=C(k)\varphi\exp(ikx_1) \tag{2.7}$$

$$\sigma_{31}(0)=\left[T(k)\varphi+M(k)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right]\exp(ik_1) \tag{2.8}$$

Конкретные виды функций $C(\kappa)$, $T(\kappa)$ и $M(\kappa)$ различны в зависимости от типа падающей волны (продольной или поперечной). Поэтому они будут приведены в дальнейшем изложении.

Решения системы уравнений (1.1) и (1.2) при граничных условиях (2.7) и (2.8) следует искать в следующем виде:

$$\Phi=(2\pi)^{1/2}\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{+\infty}[A_1\exp(i\nu_1)+B_1\exp(i\nu_2)]dk \tag{2.9}$$

$$\psi=(2\pi)^{1/2}\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{+\infty}[A_2\exp(i\nu_3)+B_2\exp(i\nu_4)]dk \tag{2.10}$$

где

$$\nu_1=kx_1+k_2x_3, \quad \nu_2=kx_1-k_2x_3, \quad \nu_3=kx_1+k_3x_3, \quad \nu_4=kx_1-k_3x_3.$$

Пусть падающая волна продольная, тогда в выражениях (2.9) и (2.10) следует подставить $A_2=0$. Учитывая соотношения (1.5)—(1.7) и подставляя решения (2.9) и (2.10) в граничные условия (2.7) и (2.8) и делая обратное преобразование Фурье, получатся следующие алгебраические соотношения:

$$-Q_1(A_1+B_1)+2\mu kk_1B_2=G \tag{2.11}$$

$$2kk_2(B_2-A_1)+k_nB_2=H\mu^{-1} \tag{2.12}$$

где

$$G=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} C(k)\varphi dx_1 \tag{2.13}$$

$$H=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[T\varphi+M\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right]\partial x_1 \tag{2.14}$$

Решая систему алгебраических уравнений (2.11) и (2.12), для коэффициентов B_1 и B_2 получатся следующие соотношения:

$$B_1=Q_2Q_3^{-1}A_1+H(\mu Q_3)^{-1}-k_nG(2\mu kk_3Q_3)^{-1} \tag{2.15}$$

$$B_2=(2\mu kk_1)^{-1}\{Q_1(1+Q_2Q_3^{-1})A_1+[1- \tag{2.16}$$
$$-k_n(2\mu kk_1Q_3)^{-1}Q_1]G+Q_1H(Q_3\mu)^{-1}\}$$

Для нахождения колебаний границы полупространства необходимо подставить решения (2.9) и (2.10), с учетом значений коэффициентов (2.15) и (2.16), в соотношения (1.3) и (1.4), тогда получится сумма нескольких интегралов.

Для расчета интегралов (2.13) и (2.14) нужно задать вид функции φ. Однако более удобно задать функцию искривленности границы в виде ряда Фурье. Предполагая, что φ удовлетворяет условиям для разложения в ряд, можно написать:

$$\varphi=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi_m\exp(imgx_1) \tag{2.17}$$

где $g=2\pi\Lambda$, Λ — периоды неровностей в направлении оси координат x_1, $m\neq0$. Тогда, учитывая, что

$$\delta(g)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(igx_1)dx_1$$

где $\delta(g)$ — дельта-функция Дирака, для интегралов (2.13) и (2.14) получатся следующие выражения:

$$G=(2\pi)^{1/2}C(k)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\varphi_m\delta(mg) \tag{2.18}$$

$$H=(2\pi)^{1/2}\left|T(k)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\varphi_m\delta(mg)+igM(k)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}m\varphi_m\delta(mg)\right| \tag{2.19}$$

Выводы формул для перемещений точек неплоской поверхности границы будут сделаны для случая $m=1$, в формулах (2.18) и (2.19).

Расчеты будут сделаны для фиксированных значений волновых чисел, поэтому будет положено, что

$$A_1=(2\pi)^{1/2}A_{01}\delta(k-k_0) \tag{2.20}$$

где A_{01}, φ_1—постоянные величины.

Интегрировать интегралы удается, когда $g=\kappa-\kappa_0$, а это означает, что длина неровностей поверхности сравнима с длиной падающей волны. Именно этот случай часто встречается на практике. Тогда для смещений поверхностных точек получатся следующие выражения:

$$U_1=i\exp(-i\omega t)\{kA_{01}\exp(i\nu_1)+kQ_3^{-1}[Q_2A_{01}-C\varphi_1k_n(2\mu kk_3)^{-1}+$$

$$+T\varphi_1\mu^{-1}]\exp(i\nu_2)+(2\mu k)^{-1}[Q_1T\varphi_1(\mu Q_3)^{-1}+Q_1(1+Q_2Q_3^{-1})A_{01}+$$

$$+[1-k_nQ_1(2\mu kk_3Q_3)^{-1}]C\varphi_1]\exp(i\nu_4)\} \quad \text{при} \quad x_3=\varphi, \tag{2.21}$$

$$U_3=i\exp(-i\omega t)\{k_2A_{01}\exp(i\nu_1)-k_2Q_3^{-1}[Q_2A_{01}-k_n\varphi_1C(2\mu kk_3)^{-1}+$$

$$+\varphi_1T\mu^{-1}]\exp(i\nu_2)+(2\mu k_3)^{-1}[Q_1(1+Q_2Q_3^{-1})A_{01}+\varphi_1Tk_2Q_3(\mu k_3Q_3)^{-1}+$$

$$+[1-k_nQ_1(2\mu kk_3Q_3)^{-1}]C\varphi_1]\exp(i\nu_4)\} \quad \text{при} \quad x_3=\varphi \tag{2.22}$$

где

$$C(k)=2ik_2Q_3Q_3^{-1}(k_n+2kk_3)A_{01}, \quad T=-2ik_2Q_3^{-1}[4k^2k_2^2\mu+$$

$$+k_nQ_1]A_{01}, \quad M=8kk_2Q_1Q_3^{-1}A_{01}, \quad Q_1=k^2(\lambda+2\mu)+k_2^2\lambda.$$

Сравнить полученные выражения (2.21) и (2.22) с соотношениями (2.3) и (2.4) можно только в точках $x_3=0$. Подставляя в выражения (2.21) и (2.22) $x_3=0$, получатся выражения, где только первые слагаемые совпадут с выражениями (2.3) и (2.4). Таким образом, колебания выбранных точек криволинейной границы сильно отличаются от колебании этих же точек при плоской границе.

Пусть падающая волна поперечная, тогда в выражениях (2.9) и (2.10) следует подставить $A_1=0$. Поступая аналогичным образом, как это было сделано при $A_2=0$, можно получить систему алгебраических уравнений относительно B_1 и B_2. Решая эти уравнения, для коэффициентов B_1 и B_2 получатся следующие выражения:

$$B_1=4\mu kk_3k_n(Q_1Q_3)^{-1}A_2+2kk_3H(Q_1Q_3)^{-1}-(1-4\mu k^2k_2k_3Q_1^{-1}Q_3^{-1})GQ_1^{-1}$$

$$B_2=Q_2Q_3^{-1}A_2+2kk_3(Q_1Q_3)^{-1}G+(\mu Q_3)^{-1}H$$

Аналогично, как это было сделано при падающей продольной волне, можно для смещения неровной поверхности получить следующие выражения:

$$U_1=i\exp(-i\omega t)\{[Q_2A_{02}+2kk_3C\varphi_1Q_1^{-1}+\mu^{-1}\varphi_1T]Q_3^{-1}k_2\exp(i\nu_4)-$$

$$-A_{02}k_3\exp(i\nu_3)+[4\mu kk_2k_nQ_3^{-1}A_{02}-(1-4\mu k^2k_2k_3Q_1^{-1}Q_3^{-1})C\varphi_1-$$

$$-2ikk_3T\varphi_1Q_3^{-1}]Q_1^{-1}k\exp(i\nu_2)\} \quad \text{при} \quad x_3=\varphi, \tag{2.23}$$

$$U_3=i\exp(-i\omega t)\{kA_{02}\exp(i\nu_3)+[-4kk_2\mu k_nQ_3^{-1}A_{02}+(1-$$

$$-4\mu k^4 k_2 k_3 Q_1^{-1} Q_2^{-1})\varphi_1 C - 2kk_3 T\varphi_1 Q_3^{-1} [k_2 Q_1^{-1} \exp(i\nu_4) +$$

$$+ kQ_3^{-1}(Q_2 A_{02} + \varphi_1 T\mu^{-1} + 2k_2 kC\varphi_1 Q_1^{-1})\exp(i\nu_4)\} \quad \text{при} \quad x_3 = \varphi \tag{2.24}$$

где

$$C(k) = 2ikk_3\mu[k_1 + k_3 + Q_2 Q_3^{-1}(k_1 - k_3)]A_{02}$$

$$T(k) = i\mu k_3(4k^2 k_2^2 \mu Q_1^{-1} + k_n)(1 - Q_2 Q_3^{-1})A_{02}$$

$$M(k) = 2\mu kk_3(1 + Q_4 Q_1^{-1})(Q_2 Q_3^{-1} - 1)A_{02}$$

Подставляя $x_3 = 0$ и сравнивая с соотношениями (2.5) и (2.6), можно видеть, что как и в случае $A_1 = 0$, искривленность границы существенно меняет колебания выбранных точек свободной поверхности.

Нетрудно заметить, что полученные выражения (2.21)—(2.24) легко обобщить для различных значений m, однако из-за громоздкости формул здесь не приводятся.

С помощью формул (2.3)—(2.6), (2.21)—(2.24) можно вычислить горизонтальные и вертикальные перемещения неровной поверхности в точках $x_1 = 0$ и оценить влияние неровностей свободной поверхности на колебания выбранных точек, сравнить их с колебаниями аналогичных точек плоской свободной поверхности. Результаты численных оценок приведены в таблице. Величины в таблице—безразмерные. Расчеты сделаны для грунта, для которого $C_1^2 C_2^{-2} \approx 3$. Случай $k\varphi_1 = 0$ соответствует плоской поверхности полупространства.

Таблица

$k\varphi_1$	$\lvert U_1 \rvert / kA_{01}$			$\lvert U_3 \rvert / kA_{01}$		
	$\alpha = 15°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$
0	2.3	4.74	2.16	10.43	4.43	1.9
0.1	0.66	3.593	1.728	10.41	4.58	2.11
0.2	3.62	2.716	1.296	10.39	4.72	2.33
0.3	6.58	1.839	0.864	10.36	4.87	2.54
0.4	9.54	0.962	0.432	10.34	5.02	2.76
0.5	12.5	0.085	0.01	10.31	5.16	2.97

Как видно из данных, приведенных в таблице, наличие неровностей поверхности, даже при малых значениях $k\varphi_1$, приводит к существенному изменению перемещений поверхности.

Авторы благодарят А. Г. Багдоева за ценные консультации, а также участников семинара «Волновые процессы» Института механики АН Армении.

THE PROPAGATION OF WAVES IN SEMI-SPACE WITH THE ROUGHNESS BOUNDARY

V. A. AMBARTSUMIAN, A. V. SHEKOYAN

ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՈՉ ՀԱՐԹ ԵԶՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Վ. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Ամփոփում

Քննարկված է փոքր անհարթություններ ունեցող և լարումներից ազատ մակերևույթի առկայության դեպքում առաձգական ալիքների տարածման խնդիրը։ Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ մակերևույթի տատանման համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уайт Дж. Э.* Возбуждение и распространение сейсмических волн.—М.: Недра, 1986. 264 с.
2. *Aki K., Larner K. L.* Surface motion of layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves.—J. Geophys. Res., 1970, v. 75, № 5, p. 953—954.
3. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны.—М.: Недра, 1972. 292 с.
4. *Бреховских А. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред.—М.: Наука, 1989. 125 с.
5. *Белубекян М. В.* О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности.—Докл. АН АрмССР, 1990, т. 90, № 2, с. 71—74.
6. *Бреховских А. М.* О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела.—Акуст. журн., 1959, т. 5, № 3, с. 282—289.
7. *Campillo M., Bouchon M.* Synthetic SH seismograms in a laterally varying medium by the discrete wavenumber method.—Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1985, v. 83, № 1, p. 307—317.
8. *Gjoystdal H., Reinhardsen J. E., Ursin B.* Traveltime and wave front curvature calculations on three—dimensional inhomogeneous layered media with curved interfaces.—Geophys., 1984, v. 49, p. 1466—1494.
9. *Новацкий В.* Теория упругости.—М.: Мир, 1975. 872 с.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 13.III.1991