

УДК 534.1

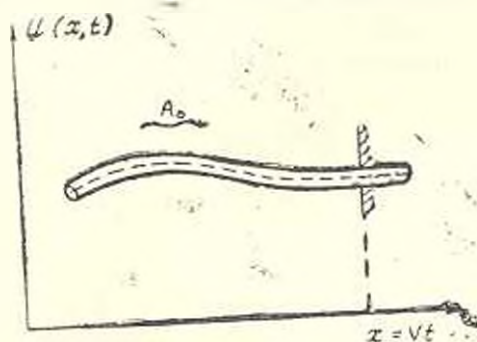
ОДНОКРАТНОЕ ВЗАМОДЕЙСТВИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН С
ДВИЖУЩИМСЯ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

ТРУБИН М. В.

Рассмотрена задача об однократном взаимодействии изгибных волн и балки с движущимся закреплением. Вскрыт эффект преобразования энергии волн на движущемся закреплении посредством которого являются силы волнового давления. Приводится зависимость силы давления волн от скорости движения. На основе точного решения проанализированы качественно различные случаи волнообразования. Найдены первые интегралы задачи—законы сохранения энергии, волнового импульса и числа квантов волновой энергии.

Изучению динамического поведения упругих систем с движущимися закреплениями посвящено большое количество работ [1—3], в которых основное внимание уделяется постановкам краевых задач, определению собственных частот и форм колебаний. Наряду с этим, в работах [4—6] развивались волновые подходы к исследованию указанных систем, которые позволили вскрыть механизм преобразования энергии волн на движущихся закреплениях, показано, что динамическое поведение упругих систем с движущимися закреплениями определяется волновыми эффектами. В связи с этим представляет интерес выявление полного набора волновых эффектов и изучение особенностей их проявления с учетом конкретных моделей упругих систем. В данной работе проводятся исследования волновых эффектов на примере простейшей задачи об однократном взаимодействии упругих волн с движущимся закреплением.

Рассмотрим отражение изгибных волн от абсолютно жесткого закрепления, движущегося с постоянной скоростью v , на примере балки, описываемой моделью Бернулли-Эйлера (фиг. 1).



Фиг. 1.

Пусть слева на движущееся закрепление падает гармоническая волна (фиг. 1), колебания балки ($x \leq vt$) представим в виде суперпозиции волн

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^2 A_n \exp(i(\omega_n t - k_n x)) + A_0 \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — поперечное отклонение балки, $A_0, \omega_0, k_0, A_n, \omega_n, k_n$ — соответственно амплитуды, частоты и волновые числа падающей и вторичных волн. Из (1) и уравнения, описывающего колебания балки

$$u_{tt} - x^2 u_{xx} = 0$$

где $x^2 = EJ/\rho F$, EJ — изгибная жесткость, ρF — погонная плотность, для частот и волновых чисел следует дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - x^2 k^2 = 0 \quad (2)$$

После подстановки (1) в условия на движущемся закреплении

$$u|_{x=vt} = u_x|_{x=vt} = 0$$

получим кинематический инвариант

$$\omega_i - k_i v = \omega_0 - k_0 v, \quad i=1, 2 \quad (3)$$

который означает равенство частот всех волн в системе координат, связанной с движущимся закреплением, а также систему линейных алгебраических уравнений, определяющих амплитуды отраженных волн

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 A_i = -A_0 \\ \sum_{i=1}^2 k_i A_i = -k_0 A_0 \end{cases}$$

Для выявления физически реализуемых решений потребуем выполнения условия излучения Мандельштама (для вторичных волн)

$$v_{gr i} < v, \quad i=1, 2$$

и ограниченности решения на бесконечности

$$u|_{x \rightarrow \pm \infty} < \infty$$

которые на языке кинематики волн можно записать в виде

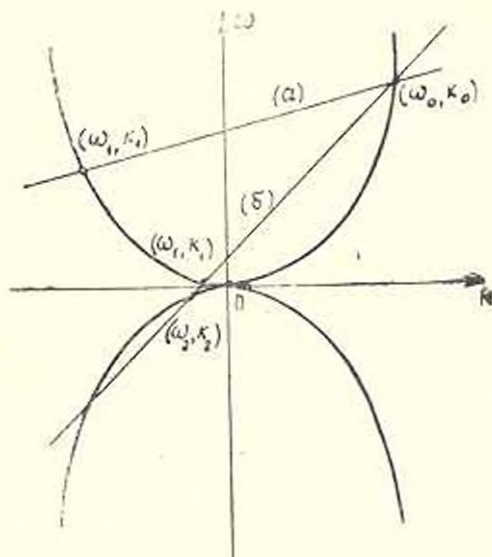
$$\frac{d\omega_i}{dk_i} < v, \quad \forall \operatorname{Im} k_i > 0 \quad (5)$$

Таким образом, задача кинематики (2), (3), (5) об определении частот и волновых чисел вторичных волн отделяется от задачи динамики (4), состоящей в нахождении амплитуд.

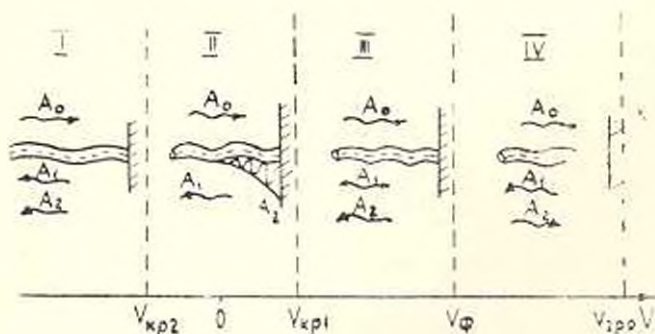
Графически проиллюстрируем решение задачи кинематики на плоскости ω, k , где действительные частоты и волновые числа вторичных волн лежат на пересечении дисперсионной кривой (2) и прямой, изо-

бражающей кинематический инвариант (3) и проходящей через точку ω_0, κ_0 (фиг. 2).

В зависимости от скорости движения возможны качественно различные случаи волнообразования, которые представлены на (фиг. 3), где схематично изображены бегущие гармонические волны и колебания, экспоненциально спадающие по мере удаления от закрепления. Критические скорости, отложенные на оси v (фиг. 3), имеют значения



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$v_{kp1} = v_{gro}(\sqrt{2} - 1)$, $v_{kp2} = v_{gro}(-1 - \sqrt{2})$, где $v_{gro} = 2\alpha k_0$ — групповая скорость падающей волны, $v_\phi = \alpha k_0$ — фазовая скорость падающей волны. При малых скоростях движения $v_{kp2} < v < v_{kp1}$ (фиг. 3 зона II, фиг. 2(a)) так же, как и при $v=0$, возникает одна отраженная волна

$$\omega_1 = \frac{v_{gro}}{2} \left(1 - \frac{2v}{v_{gro}}\right)^2; \quad k_1 = \frac{v}{\alpha} - k_0; \quad A_1 = A_0 e^{i\phi} \left/ \left(1 - \frac{2v}{v_{gro}}\right) \right|;$$

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 - \frac{2v}{v_{гpo}} - \frac{v^2}{v_{гpo}^2}} \right) \left(1 - \frac{v}{v_{гpo}} \right)$$

и экспоненциально спадающее от закрепления колебание

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{v_{гpo}}{2} \left(1 - \frac{2v}{v_{гpo}} - \frac{v^2}{v_{гpo}^2} + i \frac{2v}{v_{гpo}} \sqrt{1 - \frac{2v}{v_{гpo}} - \frac{v^2}{v_{гpo}^2}} \right) \\ k_2 &= i k_0 \left(\sqrt{1 - \frac{2v}{v_{гpo}} - \frac{v^2}{v_{гpo}^2}} + i \frac{v}{v_{гpo}} \right) \\ A_2 &= -A_0 e^{i\varphi_1} \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}v}{v_{гpo}} \right) \left(1 - \frac{2v}{v_{гpo}} \right) \\ \varphi_2 &= 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 - \frac{2v}{v_{гpo}} - \frac{v^2}{v_{гpo}^2}} \right) \left(\frac{2v}{v_{гpo}} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) + (\sqrt{2} - 1) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

С увеличением скорости движения $v_{гpo} < v < v_\phi$ возникают две отраженные волны (фиг. 2(б), фиг. 3 зона III), одна из которых распространяется в сторону, противоположную движению закрепления, а другая — в ту же сторону, что и закрепление, отставая от него

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{v_{гpo}}{2} \left(1 - \frac{2v}{v_{гpo}} \right)^2; \quad k_1 = \frac{v}{2} - k_0 \\ A_1 &= A_0 \left(1 + \frac{v}{v_{гpo}} - \sqrt{\frac{v^2}{v_{гpo}^2} + \frac{2v}{v_{гpo}} - 1} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{v^2}{v_{гpo}^2} + \frac{2v}{v_{гpo}} - 1} - \frac{3v}{v_{гpo}} \right) \\ \omega_2 &= \frac{v_{гpo}}{2} \left(1 - \frac{2v}{v_{гpo}} - \frac{v^2}{v_{гpo}^2} + \frac{2v}{v_{гpo}} \sqrt{\frac{v^2}{v_{гpo}^2} + \frac{2v}{v_{гpo}} - 1} \right) \\ k_2 &= k_0 \left(\sqrt{\frac{v^2}{v_{гpo}^2} + \frac{2v}{v_{гpo}} - 1} - \frac{v}{v_{гpo}} \right) \\ A_2 &= -A_0 \left(1 - \frac{2v}{v_{гpo}} \right) \left(1 - \frac{3v}{v_{гpo}} + \sqrt{\frac{v^2}{v_{гpo}^2} + \frac{2v}{v_{гpo}} - 1} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

При переходе через $v = v_\phi$ отраженные волны меняют направление распространения на противоположное (фиг. 3 зона IV). Параметры отраженных волн для $v_\phi < v < v_{гpo}$ описываются (7). И наконец, случай движения закрепления навстречу волне со скоростью, большей $|v_{гpo}|$, изображен на фиг. 3 зона I, отраженные волны направлены в сторону движения закрепления, параметры которых определяются формулами (7). При $v > v_{гpo}$ отраженных волн не возникает, так как падающая волна не может «догнать» закрепление.

Пусть на движущееся закрепление падает цуг гармонической волны длиной l_0 . Учитывая, что время его взаимодействия с закреплением

$$\tau = \frac{l_0}{v_{гpo} - v}$$

найдем длины цугов отраженных волн

$$l_1 = \tau(v - v_{rp1}) = l_0; \quad l_2 = \tau(v - v_{rp2}) = l_0 \frac{v - v_{rp0}}{v - v_{rp0}}$$

Зная время взаимодействия и длины цугов вторичных волн, запишем законы сохранения энергии и импульса для докритических скоростей $v_{кр0} < v < v_{кр1}$

$$W_0 + F\tau = W_1, \quad P_0 + F\tau = P_1 \quad (8)$$

где $W_i = h_i l_i$ — энергия цуга, $h_i = \frac{1}{2}(\rho F u_i^2 + E J u_{i,x}^2)$ — плотность энергии,

$P_i = p_i l_i$ — импульс цуга, $p_i = -\rho F u_i u_{i,x}$ — плотность импульса, $F = \frac{1}{2}(\rho F u_2^2 + E J u_{2,x}^2 - 2E J u_{x0} u_2) - \text{с.г.э.}$ [6].

Из (8) видно, что энергия отраженной волны не равна энергии падающей, поскольку за время взаимодействия τ закрепление совершает работу $F\tau$. При этом имеют место следующие инвариантные соотношения

$$\frac{h_0}{\omega_0} = \frac{h_1}{\omega_1} = I_1 = \text{const}, \quad \frac{p_0}{k_0} = \frac{p_1}{k_1} = I_2 = \text{const}$$

$$\frac{W_0}{\omega_0} = \frac{W_1}{\omega_1} = I_3 = \text{const}, \quad \frac{P_0}{k_0} = \frac{P_1}{k_1} = I_4 = \text{const}$$

Два последних выражают закон сохранения числа квантов волновой энергии [7].

Для закритических скоростей ($v < v_{кр2}$, $v > v_{кр1}$) законы сохранения и соответствующие им инвариантные соотношения принимают вид:

$$W_0 + F\tau = W_1 + W_2, \quad P_0 + F\tau = P_1 + P_2$$

$$\frac{W_0}{\omega_0} = \frac{W_1}{\omega_1} + \frac{W_2}{\omega_2} = I_3 = \text{const}, \quad \frac{P_0}{k_0} = \frac{P_1}{k_1} + \frac{P_2}{k_2} = I_4 = \text{const}$$

При взаимодействии волн с закреплением имеет место эффект волнового давления. Для отыскания постоянной составляющей силы волнового давления приравняем изменение энергии, усредненное на периоде $T = 2\pi/(\omega_0 - k_0 v)$, работе силы давления волн и получим для докритических скоростей

$$F = \frac{1}{2} u_0^2 \omega_0^2 \rho F \left(1 - \frac{2v}{v_{rp0}}\right)^2$$

для закритических

$$F = \frac{1}{2} u_0^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{2v}{v_{rp0}}\right)^2 \left(\frac{2v}{v_{rp0}} + \frac{v^2}{v_{rp0}^2} - \left(1 - \frac{v}{v_{rp0}}\right) \sqrt{\frac{v^2}{v_{rp0}^2} + \frac{2v}{v_{rp0}} - 1}\right)$$

На фиг. 4 приведен график силы давления в зависимости от скорости движения.

Таким образом, использование волнового подхода позволило впервые вскрыть эффект преобразования энергии волн в балке с движущимся закреплением. Посредником этого преобразования выступают силы давления волн. На основе точного решения проанализированы



Фиг. 4.

качественно различные случаи волнообразования. Приводятся зависимости силы волнового давления на закрепление от скорости движения. Найдены первые интегралы задачи в виде законов сохранения волновой энергии, волнового импульса и квантов волновой энергии. Полученные результаты наглядно интерпретируют особенности динамического поведения и могут быть использованы при проектировании систем, содержащих упругие элементы с движущимися закреплениями.

ONE TIMES BENDING WAVES INTERACTION WITH MOOVING CLAMPING

M. V. TRUBIN

ՄԻՄԱՆ ԱՎԻՔՆԵՐԻ ՄԻԱՊԱՏԻՎ ՓՈԽԱԶՌԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՇԱՐԺԱՎՈՂ ԱՄՐԱՑՄԱՆ ՀԵՏ

Մ. Վ. ՏՐՈՒՆԻՆ

Ա մ փ ա փ ու մ

Դիտարկված է հեծանում ծռման ալիքների շարժող ամրացման հետ միապատիկ փոխազդեցության մասին խնդիրը: Բացահայտված է շարժվող ամրացման վրա ալիքների էներգիայի փոխակերպման երևույթը, որի միջնորդը ալիքային ճնշման ուժերն են: Ստացված է ալիքների ճնշման ուժի կախումը շարժման արագությունից: Ճշգրիտ լուծման հիման վրա վերլուծված են ալիքադոյացման որակապես տարրեր դեպքեր: Ստացված են էներգիայի պահպանման և ալիքային իմպուլսի օրենքները, ինչպես նաև ալիքային էներգիայի քվանտների թվերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение. 1978. 222 с.
2. Горошко О. А., Савин Г. П. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины.—Киев: Наукова Думка. 1971. 287 с.
3. Мовсисян Л. А. Колебания полубесконечной балки с перемещающимся концом.—Инж. журн. Механика твердого тела, 1966, № 1, с. 174—176.
4. Весницкий А. И., Потапов А. И. Волновые явления в одномерных системах с движущимися границами.—Динамика систем Горьк. ун-та.—Горький, 1978, вып. 13, с. 38—88.
5. Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А. Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками.—Дифференц. и интегр. уравнения: Сб. научн. работ Горьк. ун-та.—Горький, 1982, с. 75—80.
6. Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками.—ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 862—866.
7. Острооский Л. А. Некоторые общие соотношения для волн на движущейся границе раздела двух сред.—ЖЭТФ. 1971, т. 61, № 2(8), с. 551—561.

Филиал Института машиноведения
в Нижнем Новгороде

Поспущала в редакцию
18.1.1991

