

УДК 539.4

МОДЕЛЬ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И ПРОЧНОСТИ
ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА С УЧЕТОМ
НЕПРЯМОУГЛЫЙНОСТИ ВОЛОКОН

СИМОНЯН А. М.

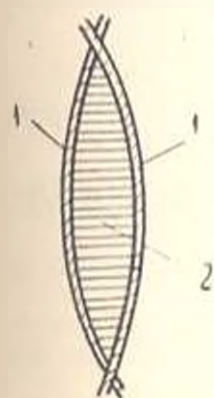
Строится модель деформирования и разрушения волокнистого композита. Принимается, что наполнитель представляет собой систему первоначально искривленных волокон, воспринимающих всю внешнюю нагрузку, при этом связующее препятствует выпрямлению волокон, содействуя вовлечению их в работу. Принимая, что количество волокон неограниченно велико, строятся детерминированные соотношения для описания деформативных и прочностных свойств композита на основе упругих и прочностных свойств волокон с учетом их разброса по стохастически заданной криволинейности, а также на основе упругих свойств связующего и его прочности на сдвиг.

Как известно, прочность однонаправленно-армированного композита вдоль волокон, зачастую, существенно ниже прочности наполнителя, и, следовательно, вопрос о повышении реализации прочности наполнителя в композите актуален. Согласно простейшему расчету, основанному на законе смесения композита лишь 1—2,5% [1] от внешней растягивающей нагрузки воспринимается связующим, то есть вид связующего и технология отверждения или термообработки композита практически не влияют на долю нагрузки, воспринимаемой волокнами. Однако, как показывают эксперименты, технология изготовления композита существенно влияет на его упругие и прочностные свойства, причем влияние это имеет место не только за счет изменения пористости связующего и, следовательно, изменения фактического коэффициента армирования по объему.

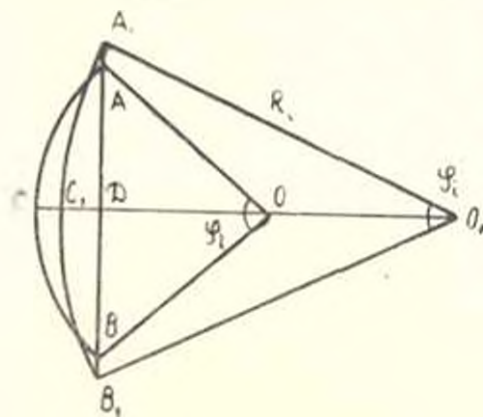
В настоящей работе природа сопротивления композита растяжению вдоль волокон представляется следующим образом. Принимается, что наполнитель представляет собой систему первоначально искривленных волокон [2], воспринимающих всю внешнюю нагрузку, при этом связующее препятствует выпрямлению волокон, содействуя вовлечению их в работу. После разрушения какого-либо волокна оно выключается из работы по некоторой длине, определяемой свойствами компонентов композита и их сцеплением. Принимая, что количество волокон в композите неограниченно велико, строятся детерминированные соотношения для описания деформативных и прочностных свойств композита на основе упругих и прочностных свойств волокон с учетом их разброса и стохастически заданной криволинейности, а также на основе упругих свойств связующего и его прочности на сдвиг.

1. Рассмотрим растягиваемый элемент (фиг. 1), состоящий из симметрично искривленных по дуге полок (1) с заполнением (2) из связующего. На фиг. 2 половина этого элемента показана до (АСВД) и после (А₁С₁В₁Т₁) деформации.

Для продольной деформации элемента ϵ имеет место следующее выражение:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$\epsilon = \frac{AA_1 + BB_1}{AB} = \frac{R_1 \sin \frac{\varphi_1}{2}}{R_1 \sin \frac{\varphi_1}{2}} - 1 \quad (1.1)$$

Для деформации полки ϵ_1 и деформации связующего ϵ_2 очевидны следующие выражения:

$$\epsilon_1 = \frac{\widetilde{A_1B_1} - \widetilde{AB}}{\widetilde{AB}} = \frac{R_1 \varphi_1}{R_1 \varphi_1} - 1$$

$$\epsilon_2 = \frac{\widetilde{C_1D_1} - \widetilde{CD}}{\widetilde{CD}} = \frac{R_1 \sin^2 \frac{\varphi_1}{4}}{R_1 \sin^2 \frac{\varphi_1}{4}} - 1 \quad (1.2)$$

Используя приближения для малых углов

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}; \quad \sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3}$$

в применении к $\frac{\varphi_1}{2}$ и $\frac{\varphi_1}{4}$, получим следующее соотношение:

$$\epsilon_2 = -\frac{12}{\varphi_1^2} (1 - \epsilon_1) \quad (1.3)$$

Используя условие равновесия для волокна с диаметром

$$P_i = -\lambda_i R_i \varepsilon_i \quad (1.4)$$

и принимая, что волокна и связующее деформируются упруго, получим

$$\varepsilon_i = \frac{4P_i}{\pi E_i \delta_i^3}; \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_i(1-\mu_c^2)}{E_c} \quad (1.5)$$

где E_i , E_c и μ_c — модули упругости i -го волокна и связующего и коэффициент Пуассона связующего, соответственно.

Уравнение (3) переписывается так:

$$P_i \left(\frac{1-\mu_c^2}{\pi R_i E_c} + \frac{48}{\pi^2 E_i \delta_i^3} \right) = \frac{12}{\pi^2} \varepsilon_i \quad (1.6)$$

(Заметим, что ε_i однозначно определяется отношением разницы длин волокна l_i и элемента l к длине элемента, независимо от R_i .)

$$\frac{h_i}{l} = \frac{l_i - l}{l} = \frac{R_i \gamma_i - 2R_i \sin \frac{\gamma_i}{2}}{2R_i \sin \frac{\gamma_i}{2}} \approx \frac{\gamma_i^2}{24}$$

что позволяет формулу (6) переписать так

$$P_i = \varepsilon \left(\frac{4}{\pi E_i \delta_i^3} + \frac{2h_i(1-\mu_c^2)}{\pi R_i l E_c} \right)^{-1} \quad (1.7)$$

Ясно, что формула (1.7) сохраняется и для случая элементов с несколькими волокнами.

2. Рассмотрим систему из параллельно соединенных элементов с некоторой длиной l при условии, что все эти элементы имеют одну и ту же кривизну ($R_i \equiv R$), при этом, как показано выше, могут быть моделированы элементы с произвольным $\frac{h_i}{l}$ с помощью подбора φ_i и длины полувоины l_i . Естественно принять, что для деформационного поведения такой системы не важно, в каком соседстве друг с другом находятся волокна с тем или иным искривлением и они могут рассматриваться расположенными хаотически (фиг. 3).

Из условия равновесия такой системы имеем

$$\sum_N P_i = F_0 \quad (2.1)$$

где F_0 и σ — площадь поперечного сечения и среднее напряжение системы элементов, N — количество элементов. Положим, что можем пренебречь разбросом упругих свойств и сечений волокон ($E_i \equiv E_0$, $\delta_i \equiv \delta$). При подстановке в уравнение (2.1) соотношения (1.7) и при использовании очевидного $\sum F_i = \sum F_0$, где λ — коэффициент армирования по объему, получим

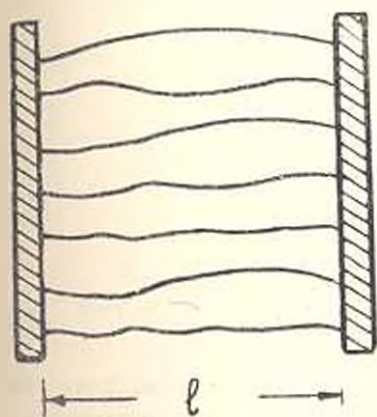
$$\sigma = \varepsilon \frac{\lambda E_0}{N} \sum_N \left(1 + \frac{\pi \lambda h_i (1-\mu_c^2)}{2Rl} \frac{E_0}{E_c} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

В предположении, что число элементов N неограниченно велико, из соотношения (2.2) получим

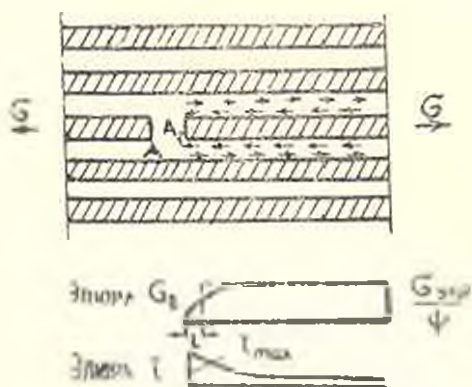
$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{2RE_c}{\pi b} \int_0^{\infty} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi b E_b (1 - \nu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x} \quad (2.3)$$

где ρ — плотность распределения $\frac{h_i}{l}$. Очевидно $\rho(y)=0$ при $y < 0$.

Соотношение (2.3) сохраняется для любой системы элементов по длине образца и, следовательно, описывает деформационные свойства однонаправленно-армированного композита вдоль волокна до начала разрушения волокон. Правая часть соотношения (2.3) представляет собой эффективное значение модуля упругости композита, зависящее от распределения $\frac{h_i}{l}$, определяющего криволинейность волокон, а также и от модуля упругости связующего, сопротивляющегося выпрямлению волокон.



Фиг. 3



Фиг. 4.

3. Как известно, после разрыва волокон в композите при удалении от точки разрыва волокно это оказывается нагруженным благодаря сопротивлению сдвигу связующего. Ниже, аналогично [3], приведем простейший расчет напряжений в волокне и в связующем в области разрыва. На фиг. 4 схематически показано волокно, разорванное в точке A_1 , причем до разрыва точки A и A_1 находились на одной вертикали. Перемещение точки A_1 вправо тормозится касательными напряжениями, передающимися через связующее. Принимая, что неразорванные волокна деформируются одинаково независимо от расстояния их от разорванного волокна, получим соотношение

$$u_A - u_{ср} = \Delta \gamma \quad (3.1)$$

где Δ — толщина прослойки связующего, u_A и $u_{ср}$ — перемещения точек разорванного волокна и неразорванных волокон, соответственно.

Дифференцируя уравнение (3.1) по z и используя очевидные соотношения

$$\frac{du_{\text{уср}}}{dz} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{E_k}, \quad \frac{du_n}{dz} = \frac{\sigma_n}{E_n}, \quad \tau = \frac{\sigma}{G_c}$$

получим

$$\frac{\sigma_n}{E_n} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{E_k} = \frac{\sigma}{G_c} \frac{d\tau}{dz} \quad (3.2)$$

Используя условие равновесия элемента волокна

$$\tau = \delta \frac{d\sigma_n}{dz} \quad (3.3)$$

а также очевидное условие $\frac{d\sigma_{\text{уср}}}{dz} = 0$, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2\tau}{dz^2} - \tau^2 \delta = 0, \quad \tau = \sqrt{\frac{G_c}{\delta E_n \delta}} \quad (3.4)$$

Решая уравнения (3.4) и (3.3) при краевых условиях $\tau|_{z=L} = 0$,

$\sigma_n|_{z=0} = 0$, $\sigma_n|_{z=L} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi}$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \left(1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{G_c}{\delta E_n \delta}} z\right) \right) \\ \tau &= \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \sqrt{\frac{G_c \delta}{\delta E_n}} \exp\left(-\sqrt{\frac{G_c}{\delta E_n \delta}} z\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

при этом

$$\tau_{\text{max}} = \tau|_{z=0} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \sqrt{\frac{G_c \delta}{\delta E_n}} \approx \sigma_{\text{уср}} \sqrt{\frac{G_c}{E_n}} \sqrt{\frac{1}{\phi(1-\phi)}} \quad (3.6)$$

формулы (3.5) и (3.6) имеют место в случае упругого поведения связующего. В случае же проявления пластических свойств значения напряжений τ будут меньшими, то есть если адгезионная прочность и прочность связующего на сдвиг превышает значение (3.6), то опасность распространения продольной трещины и постепенного выключения всего волокна из работы не имеет места. Заменим напряженное состояние волокна ступенчато-изменяющимся (на фиг. 4 показано штриховыми линиями) путем смещения напряжений вдоль волокна так, чтобы площадь упоры напряжений была бы той же, что обеспечило бы адекватность вклада волокна в восприятие композитом внешней нагрузки. При этом длина условно ненагруженной части волокна L , которую будем считать длиной неэффективной части волокна, определится по формуле

$$L = \frac{\int_0^L \left(\frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} - \sigma_n(z) \right) dz}{\frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi}} = \sqrt{\frac{\delta \Delta E_n}{G_c}} \quad (3.7)$$

4. Рассмотрим теперь процесс разрушения композита. Образец из композита представим составленным из звеньев с длиной $2L$, каждое из которых представляет собой систему параллельно соединенных изогнутых волокон, находящихся в матрице связующего; при этом будем полагать, что разрыв волокна приводит к выключению его из работы в пределах звена, не влияя на его напряженное состояние вне пределов звена.

При этом для любого из звеньев соотношение (2.2) заменится следующим:

$$\sigma = \frac{2E_c}{N} \sum_i \left(1 - \frac{\pi \delta h_i (1 - \mu_c^2) E_b}{2Rl E_c} \right)^{-1} \quad (4.1)$$

где суммирование проводится по n элементам i , для которых выполняется условие

$$P_b \leq |\sigma_n| F_b$$

где $|\sigma_n|$ — прочность волокон, или, что то же,

$$\frac{h_i}{l} \geq 2 \left(1 - \frac{|\sigma_n|}{E_n} \right) \frac{RE_c}{\pi \delta |\sigma_n| (1 - \mu_c^2)} \quad (4.2)$$

Устремляя число N волокон к бесконечности, получим

$$\sigma = \frac{2RE_c}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \int_0^{\frac{\epsilon}{E_n}} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x}, \quad \epsilon < \frac{|\sigma_n|}{E_n} \quad (4.3)$$

$$\sigma = \frac{2RE_c}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \int_{\frac{\epsilon_n}{E_n}}^{\frac{\epsilon}{E_n}} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x}, \quad \epsilon > \frac{|\sigma_n|}{E_n}$$

Эти соотношения описывают деформационное поведение композита для любого слоя, а следовательно, и для всего образца в целом, если прочность волокна $|\sigma_n|$ детерминирована, то есть можно пренебречь разбросом его экспериментальных значений или, что то же, прочность волокна не зависит от его длины. Разрушение композита будет иметь место при достижении деформации $\epsilon_{пред.}$, при которой соблюдается условие $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = 0$, что соответствует условию

$$\int_{\frac{\epsilon_n}{E_n}}^{\frac{\epsilon_{пред.}}{E_n}} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi \delta (1 - \mu_c^2) E_n} \right) \frac{dx}{1+x} = \left[\frac{2RE_c}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \left(\frac{E_n \epsilon_{пред.}}{|\sigma_n|} - 1 \right) \right] \quad (4.4)$$

Значение прочности композита σ_k определяется по формуле

$$\sigma_k = \epsilon_{пред.} \frac{2RE_c}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \rho \left[\frac{2RE_c}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \left(\frac{E_n \epsilon_{пред.}}{|\sigma_n|} - 1 \right) \right] \quad (4.5)$$

где $\varepsilon_{\text{пред}}$ удовлетворяет условию (4.4).

Положим, что прочность волокна имеет разброс. Пусть $g_1(|z|)$ — плотность распределения прочности волокна, имеющего некоторую длину l . Аналогично [3], можно сказать, что плотность распределения прочности волокна с длиной $2l$ определится по формуле

$$g_{2l}(|z|) = \frac{2l}{l} g_1(|z|) \left| \int_0^z g_1(x) dx \right|^{\frac{n}{l}-1} \quad (4.6)$$

Условие (4.2) теперь может рассматриваться лишь в вероятностном аспекте. Можно сказать, что плотность распределения правой части

$$(4.2) \quad y = \frac{2RE_c}{\pi^2[\sigma_s(1-p_c^2)]} \left(z - \frac{|z_s|}{E_s} \right) \text{ определится по формуле}$$

$$g_{2l}(y, z) = \frac{2RE_c}{\pi^2 \left(\frac{2RE_c}{\pi^2 E_s(1-p_c^2)} + y \right)^2 (1-p_c^2)} g_{2l} \left(\frac{E_s z}{1 + y(1-p_c^2)} \frac{\pi^2 E_s}{2RE_c} \right) \quad (4.7)$$

Основное соотношение (4.1) запишется так:

$$\varepsilon = \psi E_s z \int_0^{\infty} \frac{g_1(x)}{1 + \frac{\pi^2 E_s(1-p_c^2)x}{2RE_c}} \int_0^z g_{2l}(y, x) dy dx \quad (4.8)$$

Формула (4.8) описывает деформационные свойства при растяжении вдоль волокон однонаправленно-армированного композита вплоть до разрушения в зависимости от упругих свойств наполнителя и связующего, разброса в прочности волокна, определяемой плотностью распределения $g_{2l}(|z|)$, от криволинейности волокон, определяемой плотностью распределения $\psi \left(\frac{k}{l} \right)$ и от длины L неэффективной части волокна.

Прочность композита может быть определена по формуле (4.8), где вместо ε подставляется значение его, соответствующее выполнению условия $\frac{d\varepsilon}{dz} = 0$. При этом, естественно, адгезионная прочность

соединения волокна со связующим должна превосходить значение (3.6).

5. Полученные результаты позволяют сделать некоторые рекомендации по изготовлению композита. Использование связующего с высоким модулем упругости на сжатие приводит к более равномерному вовлечению волокон в работу при растяжении и, как это вытекает из формулы (2.2), к повышению модуля упругости и прочности композита. С другой стороны, у высокомодульного связующего обычно велик и модуль сдвига, что приводит к увеличению касательного напряжения (3.6) в окрестности разорванного волокна, что угрожает распространению трещины параллельной армированию. Таким образом, использование более жесткого связующего имеет смысл при обеспечении достаточно высокой адгезионной прочности и прочности связующего на

сдвиг. Как вытекает из формулы (3.6), уменьшение касательных напряжений τ_{max} может быть достигнуто также увеличением модуля упругости наполнителя E_c или приближением коэффициента армирования φ к 0,5. При этом, однако, согласно формуле (3.7), увеличивается длина неэффективной части L , что, как это видно из формулы (4.6), приводит к смещению $\sigma_{22}(|=|)$, а следовательно, и $\sigma_{22}(y, x)$ согласно (3.7), влево. Чем меньше разброс данных о прочности волокон, тем меньше влияние L на деформационные и прочностные свойства композита.

Если модуль упругости y связующего относительно невелик, то, вследствие относительно высоких значений L , важно иметь наполнитель по возможности однородный по длине, например, в виде волокон большого диаметра, при этом опасность возникновения трещины вдоль волокна незначительна.

Плотность распределения непрямолинейности $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ может регулироваться шириной натягиваемой ленты; на него влияет также и усилие натяга при намотке или укладке. Прессование, естественно, на функцию $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ не влияет. Практическое определение $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ соответственно тому или иному технологическому режиму, вообще говоря, затруднительно, но может быть осуществлено с помощью честного выжигания композита и определения свободных поперечных перемещений волокон на выжженной длине. Определение $g(|=|)$ может быть осуществлено на основе гистограммы прочности, построенной на образцах волокон или группы волокон с длиной l .

STRAIN AND STRENGTH MODEL OF FIBROUS COMPOSITS TAKING ACCOUNT CURVATURE OF FILAMENTS

A. M. SIMONIAN

ԲԵԼՐԱՍԵՐԻ, ԿՈՄԲՈՂԵՏԻ ԳԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ԵՎ ԱՐՄՈՒԹՅԱՆ ՄՈԴԵԼԸ
ԻՆԵՐԿՆԵՐԻ ՈՉ ՈՒՂԱԳՆԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱԽՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Կառուցվում է թելիկային կոմպոզիտի ղեֆորմացման և բալրուման մոդելը: Ընդունվում է, որ լցանյութը «փշրնալեն» ծոված թելիկների համակարգ է, որն ընդունում է ամրոգչ արտաքին բեռը, ընդ որում կապակցողի արգելակում է թելիկների ուղղմանը՝ ռմանդակելով նրանց ներգրավմանը աշխատանքի մեջ: Ընդունելով, որ թելիկների քանակն անսահմանափակ մեծ է, կոմպոզիտի ղեֆորմատիվ և ամրային հատկությունների նկարագրման

Համար կառուցվում են որոշող անհրաժեշտներ՝ թերիկների տառադրական և ամրային հատկությունների հիման վրա, հաշվի առնելով ստորաառիկորեն տրված կորագծով նրանց ջրվածությունը, խնայելու նաև կապակցողի տառադրական և սառչի ամրության հատկությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Լևոնյան Ա. Մ., Булавс Ф. Я. Прочность армированных пластиков.—М.: Химия, 1982. 213 с.
2. Гиль А. Н. О континуальных теории композиционных материалов с мелкомасштабными некристаллическими и структуре.—Докл. АН СССР, 1983, 268, №2, с. 307—313.
3. Розен Б. Механика упрочнения композиция и Волокнистые композиционные материалы.—М.: Мир, 1967. с. 51—97.

СКТБ КМ АН Армянии

Поступила в редакцию
6.IX.1989