ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44, №2, 1991 Механика

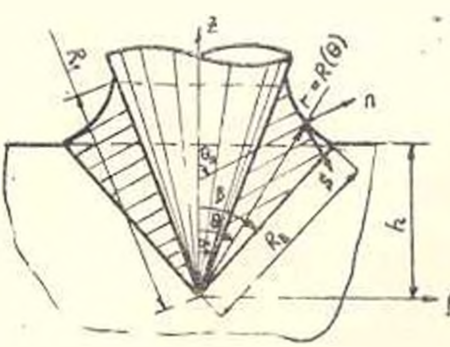
УДК 539.374

ВВИНЧИВАНИЕ ЖЕСТКОГО КОНУСА В ПЛАСТИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

АКОПЯН А. Г.

Рассматривается жесткопластическое течение пластически ортотропного материала, когда жесткий шероховатый конус ввинчивается в полупространство. Материал полупространства подчиняется соотношениям Мизеса-Хилла, главные оси анизотропии совпадают с осями сферической системы координат с центром на вершине конуса.

Рассматривается течение пластически ортотропного материала, когда жесткий шероховатый конус, вращаясь вокруг своей оси, внедряется с постоянной скоростью в полупространство (фиг. 1). Материал полупространства считается несжимаемым, идеально жесткопластическим и подчиняется соотношениям пластически ортотропного тела Мизеса-Хилла [1]. Принимается, что главные оси анизотропии совпадают с осями сферической системы координат, центр которой помещен в вершине конуса. На контактной конической поверхности возникают касательные напряжения, значения и направления которых, главным образом, зависят от шероховатости этой поверхности.



Фиг. 1.

Аналогичная задача для изотропного материала рассмотрена в работе [2]. В работе [3] рассмотрено внедрение жесткого клина в анизотропное полупространство. Вдавливание жесткого штампа в анизотропную пластическую среду рассмотрено в [4]. Исследование проникания тонкого твердого тела в трансверсально-изотропную среду проведено в [5]. В работе [6] рассмотрено ввинчивание жесткого цилиндрического тела в пластически анизотропную трубу.

1. В случае осесимметричного течения дифференциальные уравнения равновесия в сферической системе координат в обычных обозначениях имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r}(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\tau_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta)=0\\
&\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r}[(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta+3\tau_{r\theta}]=0\\
&\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta}+\frac{1}{r}(3\tau_{r\varphi}+2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta)=0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Зависимости между компонентами тензора скоростей деформаций, скоростей перемещений и напряжений

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\Omega[H_0(\sigma_r-\sigma_\theta)+G_0(\sigma_r-\sigma_\varphi)]\\
&\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=\Omega[F_0(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)+H_0(\sigma_\theta-\sigma_r)]\\
&\varepsilon_\varphi=\frac{u}{r}+\frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta=\Omega[G_0(\sigma_\varphi-\sigma_r)+F_0(\sigma_\varphi-\sigma_\theta)]\\
&2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{v}{r}=\Omega N_0\tau_{r\theta}\\
&2\gamma_{r\varphi}=\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}=\Omega M_0\tau_{r\varphi}\\
&2\gamma_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}-\frac{w}{r}\operatorname{ctg}\theta=\Omega L_0\tau_{\theta\varphi}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Условие текучести Мизеса-Хилла берем в виде

$$
F_0(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)^2+G_0(\sigma_\varphi-\sigma_r)^2+H_0(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+L_0\tau_{\theta\varphi}^2+M_0\tau_{r\varphi}^2+N_0\tau_{r\theta}^2=1 \tag{1.3}
$$

Исходя из (1.2)—(1.3), компоненты напряжений удобно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r=\sigma_\varphi+\frac{1}{\Omega}(F\varepsilon_r-G\varepsilon_\theta)\\
&\sigma_\theta=\sigma_\varphi-\frac{1}{\Omega}[H\varepsilon_r+(G+H)\varepsilon_\theta]
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\tau_{r\theta}=\frac{2}{\Omega}N\gamma_{r\theta},\qquad \tau_{r\varphi}=\frac{2}{\Omega}M\gamma_{r\varphi},\qquad \tau_{\theta\varphi}=\frac{2}{\Omega}L\gamma_{\theta\varphi},
$$

где

$$
\Omega=[(F+H)\varepsilon_r^2+2H\varepsilon_r\varepsilon_\theta+(G+H)\varepsilon_\theta^2+4L\gamma_{\theta\varphi}^2+4M\gamma_{r\varphi}^2+4N\gamma_{r\theta}^2]^{1/2}
$$

$$
F=\frac{F_0}{\Delta},\quad G=\frac{G_0}{\Delta},\quad H=\frac{H_0}{\Delta},\quad L=\frac{1}{L_0},\quad N=\frac{1}{N_0},\quad M=\frac{1}{M_0}
$$

$$\Delta = F_0G_0 + G_0H_0 + H_0F_0$$

Полагаем, что пластическая область, образующаяся вокруг жесткого конуса с углом $\theta=\alpha$, ограничивается некоторой конической поверхностью с углом $\theta=\beta$, положение которой подлежит определению в ходе решения задачи. Далее, принимается, что область пластического течения ограничивается поверхностью $r=R(\theta)$, свободной от внешних нагрузок, форму которой также следует определить. В этой области свойства материала считаются пластически ортотропными, появляющиеся вследствие пластической деформации материала (деформационная анизотропия).

Для определенности принимаем, что вращение конуса происходит в сторону уменьшения азимутальной координаты φ. Допускается, что в пластической области радиальная скорость перемещения имеет положительное направление r.

На контактной поверхности между конусом и средой задаем условия:

$$\tau_{r\theta}=m_1, \quad \tau_{\theta\varphi}=q_1, \quad v=V_0\sin\alpha \quad (\theta=\alpha) \tag{1.5}$$

Здесь V_0 — заданная скорость внедрения конуса, m_1 и q_1 — положительные постоянные, значения которых считаются заданными и зависят от характера и степени шероховатости конической поверхности соответственно в радиальном и окружном направлениях.

На граничной поверхности пластической зоны $\theta=\beta$ принимаем нормальную скорость перемещения непрерывной, а тангенциальную — разрывной. Тогда полагаем [7]

$$v=0, \quad \tau_{r\theta}\to-\infty, \quad \tau_{\theta\varphi}\to\infty \quad (\theta=\beta) \tag{1.6}$$

Имеем также условие равенства объема внедренной части конуса объему вытесняемого материала.

2. В пластической области компоненты напряжений и скорости перемещений можно выразить через неизвестные функции $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$

$$\sigma_r=\sigma_\theta-Gf'\sqrt{1-\tau^2/N}\,/\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_\theta-(G+H)f'\sqrt{1-\tau^2/N}\,/\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}$$

$$\sigma_\theta=-p_1+A\ln\frac{r}{R_1}-(G+H)\int_\alpha^\theta\frac{f'\operatorname{ctg}\theta\sqrt{1-\tau^2/N}\,d\theta}{\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}}-3\int_\alpha^\theta\tau\,d\theta$$

$$\tau_{\theta\varphi}=2L\psi'\sqrt{1-\tau^2/N}\,/\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2} \tag{2.1}$$

$$\tau_{r\varphi}=-2M\psi\sqrt{1-\tau^2/N}\,/\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}, \quad \tau_{r\theta}=\tau$$

$$u=-f'\sin\theta-2f\cos\theta, \quad v=2f\sin\theta, \quad w=2\psi\sin\theta$$

где p_1, β, $R_1=R(\alpha)$, A — неизвестные постоянные.

Приведенные выражения (2.1) будут решениями системы уравнений (1.1)—(1.3), если f, ψ и τ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''+3f'\operatorname{ctg}\theta+\frac{\tau}{\sqrt{N(N-\tau^2)}}\sqrt{(G-H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}=0$$

$$\left[\frac{2L\psi'\sqrt{1-\tau^2/N}\,\sin^2\theta}{\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}}\right]'-\frac{6M\psi\sqrt{1-\tau^2/N}\,\sin^2\theta}{\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}}=0$$

$$\tau'+\tau\operatorname{ctg}\theta+(H-G)\,\frac{f'\sqrt{1-\tau^2/N}}{\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}}+A=0 \tag{2.2}$$

Согласно (1.5)—(1.6) для этой системы уравнений находим граничные условия

$$f=\frac{V_0}{2},\quad \frac{2L\psi'}{\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}}=\frac{q_1}{\sqrt{1-m_1^2/N}}\quad(\theta=\alpha)$$

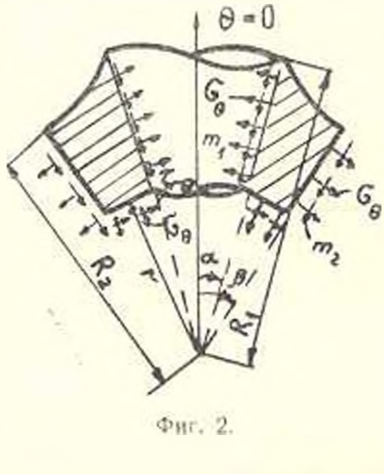
$$f=0,\ \psi'\to\infty\ (\theta=\beta)$$

$$\tau(\alpha)=m_1,\ \tau(\beta)=-m_2 \tag{2.3}$$

В формуле τ_θ из (2.1), переходя к пределу $\theta\to\beta$ и учитывая что при этом $\psi'\to\infty$, имеем зависимость между $m_2=-\tau(\beta)$ и $q_2=\tau_{r\theta}(\beta)$

$$m_2=\sqrt{N(1-q_2^2/L)} \tag{2.4}$$

3. Рассмотрим равновесие конической трубы, занимающей пластическую область $r\leqslant\rho\leqslant R(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ (фиг. 2). Приравнивая нулю сумму проекций всех сил, действующих на поверхностях мысленно выделенного тела в направлении оси $\theta=0$, а также приравнивая нулю сумму моментов всех сил относительно этой оси и учитывая, что поверхность $r=R(\theta)$ свободна от внешних сил, получим



Фиг. 2.

$$\int_r^{R_1}[\sigma_\theta(r,\alpha)\sin\alpha-m_1\cos\alpha]\sin\alpha\, r\,dr-\int_r^{R_2}[\sigma_\theta(r,\beta)\sin\beta+m_2\cos\beta]\times$$

$$\times\sin\beta\, r\,dr-\int_\alpha^\beta[\sigma_r(r,\theta)\cos\theta-\tau_{r\theta}(\theta)\sin\theta]\,r^2\sin\theta\, d\theta=0 \tag{3.1}$$

$$\int_{r}^{R_1} q_1 \sin^2\alpha\, r^2 dr - \int_{r}^{R_2} q_2 \sin^2\beta\, r^2 dr + \int_{\alpha}^{\beta} \tau_{r\theta}(\theta) r^3 \sin^2\theta\, d\theta = 0 \tag{3.2}$$

Здесь $R_2 = R(\beta)$.

Подставляя в (3.1) выражения компонент напряжений и производя интегрирование, получаем

$$p_1 = \frac{m_1 \sin 2\alpha + \nu^2 m_2 \sin 2\beta}{2(\nu^2 \sin^2\beta - \sin^2\alpha)} + \frac{\nu^2 \sin^2\beta (D + A \ln \nu)}{\nu^2 \sin^2\beta - \sin^2\alpha} - \frac{A}{2}$$

$$\nu = R_2 / R_1 \tag{3.3}$$

$$D = -(G + H) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f' \operatorname{ctg}\theta \sqrt{1 - \tau^2/N}\, d\theta}{\sqrt{(G+H) f'^2 + 4L\psi'^2 + 4M\psi^2}} - 3 \int_{\alpha}^{\beta} \tau\, d\theta$$

Далее, интегрируя почленно второе уравнение (2.2) по θ, находим

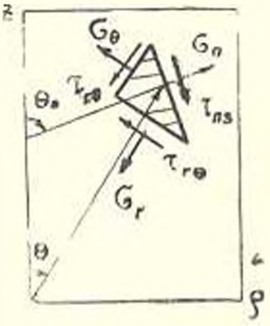
$$3 \int_{\alpha}^{\beta} \tau_{r\theta} \sin^2\theta\, d\theta = q_1 \sin^2\alpha - q_2 \sin^2\beta$$

Подставляя в (3.2), получаем

$$q_2 = \frac{q_1}{\nu^2} \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} \tag{3.4}$$

Кроме функций f, ψ, τ остается определить также функцию $R(\theta)$ и параметр β.

4. При определении формы свободной поверхности $r = R(\theta)$ игнорируем роль окружного компонента касательного напряжения в процессе формирования этой поверхности по отношению к остальным компонентам σ_n и τ_{ns}. Из условия равновесия элемента вблизи свободной поверхности $r = R(\theta)$ в меридиональной плоскости на площадке с нормалью n (фиг. 3) имеем [8]



Фиг. 3.

$$\sigma_n = \sigma_r(R, \theta) \cos^2\theta_* + \sigma_\theta(R, \theta) \sin^2\theta_* + \tau_{r\theta}(\theta) \sin 2\theta_*$$

$$\tau_{ns} = [\sigma_\theta(R, \theta) - \sigma_r(R, \theta)] \sin\theta_* \cos\theta_* + \tau_{r\theta}(\theta) \cos 2\theta_* \tag{4.1}$$

где $\theta_s=\theta_n-\theta$, а θ_n – угол между нормалью n и положительным направлением z. Пусть параметрическое уравнение линии пересечения свободной поверхности с меридиональной плоскостью задано в виде $\rho=\rho(\theta)$, $z=z(\theta)$.

Тогда

$$\sin\theta_n=-z'/\sqrt{\rho'^2+z'^2},\quad \cos\theta_n=\rho'/\sqrt{\rho'^2+z'^2} \tag{4.2}$$

Вводя функцию

$$R(\theta)=\frac{h}{\cos\beta}\exp(\varkappa(\theta)) \tag{4.3}$$

где $h=V_0t=R_1\cos\beta$, причем h – заданная глубина, t — время внедрения, и переходя к полярной системе координат $\rho=R\sin\theta$, $z=R\cos\theta$, из (4.2) получаем

$$\mathrm{tg}\,\theta_n=(\mathrm{tg}\,\theta-\varkappa')/(1+\varkappa'\mathrm{tg}\,\theta) \tag{4.4}$$

Аналогично с [2] составим выражение

$$T=\sigma_n^2+\tau_{ns}^2$$

и определим R из условия минимума T по θ_n. Дифференцированием и использованием (4.1) находим

$$\partial T/\partial\theta_n=2(\sigma_r+\sigma_\theta)\tau_{ns} \tag{4.5}$$

Полагая $\sigma_r+\sigma_\theta<0$ и приравнивая нулю (4.5), находим $\tau_{ns}=0$. Тогда

$$\theta_n=\theta+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}[2\tau_{r\theta}/(\sigma_r-\sigma_\theta)] \tag{4.6}$$

Для этих значений θ_n из (4.5) определяем

$$\frac{\partial^2T}{\partial\theta_n^2}=-(\sigma_r-\sigma_\theta)\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+4\tau_{r\theta}^2}>0$$

Следовательно, функция T получает минимальное значение при таком определении θ_n. На поверхности $r=R(\theta)$ имеем $\tau_{ns}=0$, а нормальное напряжение

$$\sigma_n(\theta)=\sigma_\theta(R,\theta)+\frac{1}{2}\left[\sigma_r-\sigma_\theta+\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+4\tau_{r\theta}^2}\right] \tag{4.7}$$

Подставляя (4.6) в (4.4), определяем $\varkappa'$, а затем, учитывая выражение компонентов напряжений (2.1), из (4.3) находим

$$R(\theta)=\frac{h}{\cos\beta}\exp\Big\{2\times$$

$$\times\int_\beta^\theta\frac{\sigma\sqrt{(G+H)f'^2+4L\varphi'^2+4M\varphi^2}\,d\theta}{\sqrt{[G^2(1-\sigma^2/N)+4(G+H)\sigma^2]f'^2+16\sigma^2(L\varphi'^2+M\varphi^2)}-Gf'\sqrt{1-\sigma^2/N}}\Big\} \tag{4.8}$$

Соответственно, будем иметь

$$= \exp\left[-2 \times \int_0^{\theta} \frac{\tau\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}\,d\theta}{\sqrt{[G^2(1-\tau^2/N)+4(G+H)\tau^2]f'^2+16\tau^2(L\psi'^2+M\psi^2)}-Gf'\sqrt{1-\tau^2/N}}\right]$$

5. Из условия сохранения количества масс

$$\int_0^{R_1\cos\alpha}\varphi^2 dz = \frac{1}{3}R_1^3\sin^2\alpha\cos\alpha$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\int_0^{\beta} e^{3\chi}\sin^3\theta(1-\chi'\operatorname{ctg}\theta)d\theta = \frac{1}{3\lambda^3}\sin^3\alpha\cos\alpha$$

Исключая χ' при помощи интегрирования по частям, приходим к уравнению

$$\int_0^{\beta}\exp\left\{6\times\int_0^{\theta}\frac{\tau\sqrt{(G+H)f'^2+4L\psi'^2+4M\psi^2}\,d\theta}{\sqrt{[G^2(1-\tau^2/N)+4(G+H)\tau^2]f'^2+16\tau^2(L\psi'^2+M\psi^2)}-Gf'\sqrt{1-\tau^2/N}}\right\}\times$$

$$\times\sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\sin^2\beta\cos\beta \qquad (5.1)$$

которое вместе с системой уравнений (2.2), при граничных условиях (2.3) определяет функции f, ψ, τ и параметры β и A.

Сила давления конуса на среду равна

$$P = -2\pi\sin\alpha\int_0^{R_1}[\sigma(r,\alpha)\sin\alpha - m_1\cos\alpha]r\,dr$$

Условное напряжение, приходящееся на основание внедренной части конуса, то есть $p = P/\pi R_1^2\sin^2\alpha$, назовем удельным давлением. После вычисления интеграла получаем

$$p = \frac{m_1\sin2\alpha - m_2\lambda^2\sin2\beta}{2(\lambda^2\sin^2\beta-\sin^2\alpha)} + \frac{\lambda^2\sin^2\beta(D-A\ln\lambda)}{\lambda^2\sin^2\beta-\sin^2\alpha} + m_1\operatorname{ctg}\alpha \qquad (5.2)$$

Зависимость между силой давления и глубиной внедрения имеет вид

$$P = \frac{\pi p}{\lambda^2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}h^2 \qquad (5.3)$$

Вращающий момент будет

$$M^* = \frac{2}{3} q_2 \sin^3\beta R_1^3$$

6. Вводя новые функции $\omega(\theta)$ и $s(\theta)$ при помощи зависимостей

$$f' = \frac{\varphi}{s}, \quad \varphi' = -\varphi \frac{\omega}{2sL} \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}} \tag{6.1}$$

система (2.2) сводится к системе дифференциальных уравнений канонического вида

$$s' = 3s\,\mathrm{ctg}\,\theta - \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}}\left(\frac{\omega}{2L} + \frac{\tau s}{N}\right)$$

$$\omega' = -2\omega\,\mathrm{ctg}\,\theta - \frac{6Ms}{\sqrt{G+H+4Ms^2}}\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L} \tag{6.2}$$

$$\tau' = -A - \tau\,\mathrm{ctg}\,\theta + \frac{H-G}{\sqrt{G+H+4Ms^2}}\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}$$

$$A' = 0$$

при граничных условиях

$$\omega(\alpha) = q_1, \quad \omega(\beta) = q_2, \quad \tau(\alpha) = m_1, \quad \tau(\beta) = -m_2 \tag{6.3}$$

Формулы компонентов напряжений (2.1) примут вид

$$\sigma_r = \sigma_\theta + \frac{G}{\sqrt{G+H+4Ms^2}}\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta + \frac{G+H}{\sqrt{G+H+4Ms^2}}\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}, \quad \tau_{r\theta} = \tau \tag{6.4}$$

$$\sigma_\theta = -p_1 + A\ln\frac{r}{R_1} + (G+H)\int_\alpha^\theta \frac{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}}{\sqrt{G+H+4Ms^2}}\,\mathrm{ctg}\,\theta\, d\theta - 3\int_\alpha^\theta \tau\, d\theta$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{2Ms}{\sqrt{G+H+4Ms^2}}\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \omega$$

Форма свободной поверхности определяется из (1.8)

$$R(\theta) = \frac{h}{\cos\beta}\exp\left[2 \times \right. \tag{6.5}$$

$$\left. \times \int_\beta^\theta \frac{\tau\sqrt{G+H+4Ms^2}\, d\theta}{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right) + \left[4(G+H) - \frac{G^2}{N} + 16Ms^2\right]\tau^2 + G\sqrt{1-\frac{\tau^2}{N}-\frac{\omega^2}{L}}}}\right]$$

Из уравнения (5.1) имеем

$$\int_\beta^h \exp\left[6 \times \right. \tag{6.6}$$

$$\times\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\tau\sqrt{G+H-4Ms^2}\,d\theta}{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right)+\left[4(G+H)-\frac{G^2}{N}+16Ms^2\right]\tau^2}+G\sqrt{1-\frac{\tau^2}{N}-\omega^2/L}}\Bigg]\times$$

$$\times\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}\sin^2\beta\cos\beta$$

Удельное давление определяется согласно (5.2), причем

$$\lambda=\exp\left[-2\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\tau\sqrt{G+H+4Ms^2}\,d\theta}{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right)+\left[4(G+H)-\frac{G^2}{N}+16Ms^2\right]\tau^2}+G\sqrt{1-\frac{\tau^2}{N}-\frac{\omega^2}{L}}}\right]$$

$$D=(G-H)\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}\,\mathrm{ctg}\,\theta d\theta}{\sqrt{G+H+4Ms^2}}-3\int_{\alpha}^{\beta}\tau d\theta \qquad (6.7)$$

На поверхности $r=R(\theta)$ нормальные напряжения будут

$$\sigma_n(\theta)=-p_s-3\int_{\alpha}^{\theta}\tau d\theta+(G-H)\int_{\alpha}^{\theta}\frac{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}\,\mathrm{ctg}\,\theta d\theta}{\sqrt{G+H+4Ms^2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right)+\left[4(G+H)-\frac{G^2}{N}+16Ms^2\right]\tau^2}+G\sqrt{1-\frac{\tau^2}{N}-\frac{\omega^2}{L}}}{2\sqrt{G+H+4Ms^2}}-$$

$$-2\lambda\int_{\alpha}^{\theta}\frac{\tau\sqrt{G+H-4Ms^2}\,d\theta}{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right)+\left[4(G+H)-\frac{G^2}{N}+16Ms^2\right]\tau^2}+G\sqrt{1-\frac{\tau^2}{N}-\frac{\omega^2}{L}}}$$

Согласно полученному решению из свободной поверхности вследствие приближенного удовлетворения граничным условиям на этой поверхности «появляются» внешние нагрузки. Влияние этих нагрузок на напряженное состояние пластической области вдали от свободной поверхности полагаем несущественным.

Из дифференциальных уравнений (6.1), определяя функции $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$ при граничных условиях $f(\alpha)=V_0/2$, $f(\beta)=0$ и подставляя в выражения скоростей перемещений (2.1), находим

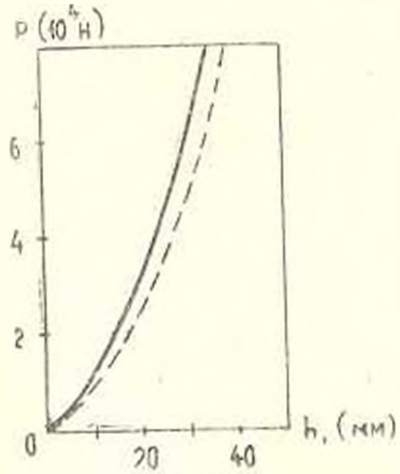
$$u=\frac{V_0}{2I(\alpha)}\cdot\frac{\sin\theta}{s(\theta)}\exp\left(-\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\theta}\frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}}\frac{\omega}{s}d\theta\right)-V_0\frac{I(\theta)}{I(\alpha)}\cos\theta$$

$$v=V_0\frac{I(\theta)}{I(\alpha)}\sin\theta,\quad w=-V_0\frac{\sin\theta}{I(\alpha)}\exp\left(-\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\theta}\frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\frac{\tau^2}{N}-\frac{\omega^2}{L}}}\frac{\omega}{s}d\theta\right)$$

где

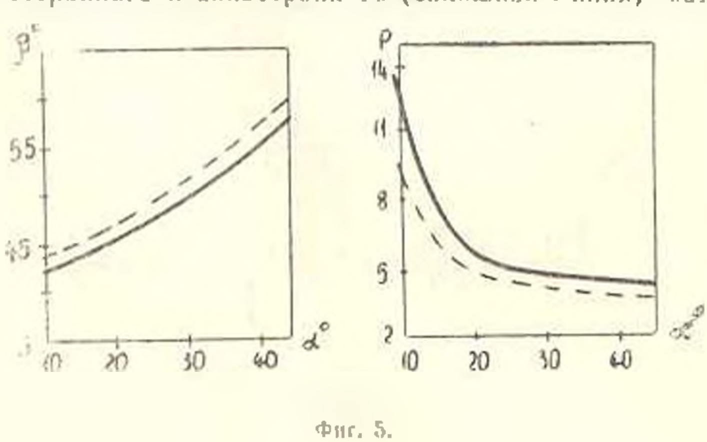
$$I(\theta)=\int_{\theta}^{\beta}\frac{1}{s(x)}\exp\left(-\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{x}\frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}}\frac{\omega(\xi)}{s(\xi)}d\xi\right)dx$$

Численное решение задачи (6.2), (6.3), (6.6), (3.4) получено с помощью следующего алгоритма. Задается значение $q_0=0$ с учетом (2.1) методом пристрелки [9], решается двухточечная краевая задача (6.2), (6.3) для выбранного значения параметра β. Затем проверяется условие (6.6). Путем варьирования параметра β достигается удовлетворение условия (6.6). Потом с учетом (6.7) проверяется условие



Фиг. 4.

(3.4). Путем варьирования значения параметра α достигается удовлетворение условия (3.4). В итоге удовлетворяются одновременно все условия задачи (6.2), (6.3), (6.6), (3.4), тем самым определяем функции τ, ω, s и параметры A, β. На основании проведенных численных расчетов на фиг. 4 построены графики силы давления по формуле (5.3) для изотропного (пунктирная линия) и для анизотропного (сплошная линия) материалов при следующих значениях параметров задачи $\frac{G}{N}=6,5$; $\frac{H}{N}=2,5$; $\frac{L}{N}=1,5$; $\frac{M}{N}=0,5$; $m_1=0,5$; $q_1=0,6$; $\alpha=30°$. Из графика видно влияние анизотропии на силу давления. Для тех же значений параметров анизотропии на фиг. 5 построены графики $\beta(\alpha)$ и $p(\alpha)$ для изотропного и анизотропного (сплошная линия) материалов.



Фиг. 5.

В случае изотропного материала параметры анизотропии принимают значения $\frac{G}{N}=\frac{H}{N}=2$, $\frac{L}{N}=\frac{M}{N}=1$. Проведено также численное исследование о границах изменения параметра α. При $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ параметр β получает значения $\beta\geqslant\frac{\pi}{2}$, что не допустимо согласно постановки задачи, так как в этом случае $R_1\to\infty$. Это зависит также от параметров анизотропии и значений параметров m_1 и q_1. Для всех рассмотренных и численных исследованиях параметров при $\alpha<80°$ такого явления не наблюдалось, то есть полученное решение для таких углов раствора конуса вполне применимо.

SCREWING OF A RIGID CONE IN PLASTIC ORTHOTROPIC HALF-SPACE

A. G. HAKOBIAN

ԿՈՇՏ ԿՈՆԻ ՆԵՐՊՏՈՒՏԱԿՈՒՄԸ ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է շրջանաձևորեն օրթոտրոպ նյութի կոշտ-պլաստիկական կիսատարածությունը, երբ անձարբ մակերեսով կոշտ կոնը ներպտուտակվում է կիսատարածության մեջ։ Որոշվել են ճնշող ուժը, պտտող մոմենտը, պլաստիկ դեֆորմացիաների տիրույթը և կիսատարածության արտամղված մակերույթի ձևը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности.—М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. *Задоян М. А.* Вдавливание жесткого конуса в идеальное жесткопластическое полупространство. Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела.—М.: Наука, 1984, с. 110—121.
3. *Новиков С. С.* Внедрение жесткого клина в анизотропное полупространство. Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением.—Тула: ТПИ, 1980, с. 23—26.
4. *Дудукаленко В. В.* О вдавливании жесткого штампа в анизотропную пластическую среду.—ПММ, 1960, т. 24, № 5, с. 962—969.
5. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Исследование проникания тонкого твердого тела в трансверсально-изотропную среду.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1987, 40, № 4, с. 3—6.
6. *Акопян А. Г.* Ввинчивание жесткого цилиндрического тела в пластически анизотропную трубу.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т. 39, № 6, с. 25—38.

7. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности.—М.: Наука, 1969. 420 с.
8. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упруго-пластического тела.—М.: Наука, 1978. 208 с.
9. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1979. 312 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
19.X 1990