ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44 № 2 1991 Механика

УДК 624.074.433.042.8

# О КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ ДЛИННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ КРУЧЕНИЯ И ДАВЛЕНИЯ

КУКУДЖАНОВ С. Н.

Исследовано влияние предварительно действующих нагрузок кручения и нормального давления (как внешнего, так и внутреннего) на спектральные характеристики длинных ортотропных цилиндрических оболочек. Рассмотрен также вопрос устойчивости.

Вопросы о собственных неосесимметричных колебаниях и устойчивости длинных ортотропных цилиндрических оболочек, находящихся под предварительным действием крутящих моментов (приложенных по торцам оболочки) и нормального давления, недостаточно освещены в литературе. Для ортотропных оболочек средней длины вопрос устойчивости подробно изучен в работе [1].

Исследование проведено на основании полубезмоментной теории, достаточно хорошо отражающей физическую суть явления [2]. При решении учитывались главные граничные условия. Ввиду того, что точное удовлетворение всем граничным условиям в задачах колебания и устойчивости цилиндрических оболочек, подверженных действию кручения, представляет определенные трудности, обычно, считается возможным удовлетворение главным граничным условиям. Решения, полученные таким образом, для определения низших частотных и критических характеристик длинных оболочек является достаточно хорошим приближением для решений, соответствующих свободному опиранию краев [3, 4].

В работе получены формулы и кривые для определения низших частот длинных оболочек от величины крутящего момента, нормального давления, геометрии и параметров ортотропии оболочки, а также кривые зависимости критических крутящих моментов от нормального давления (как внешнего, так и внутреннего). В предельном случае достаточно длинных изотропных оболочек на основании полученных зависимостей получаем формулу Тимошенко для критического момента [5].

Используя основные допущения полубезмоментной теории и пренебрегая влиянием продольной компоненты сил инерции [6], получаем основное уравнение относительно радиального перемещения $w$

$$\varepsilon\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}+2\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+w\right)+\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}-t_2^0\left(\frac{\partial^6 w}{\partial\varphi^6}-\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}\right)-$$

$$-s_2^0\left(\frac{\partial^6 w}{\partial\xi\partial\varphi^5}-\frac{\partial^4 w}{\partial\xi\partial\varphi^3}\right)-\frac{\rho R^2}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}-\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)=0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon=\frac{h^2}{12R^2},\quad t^0=\frac{\sigma^0}{E_2}=-\frac{qR}{E_2 h},\quad s^0=\frac{\tau^0}{E_2}=\frac{M}{2\pi R^2 Eh} \qquad (2)$$

$\tau^0$, $\sigma^0$ — касательное и окружное нормальное напряжения исходного состояния; $M$, $q$ — крутящий момент и давление; $R$, $l$, $h$ — радиус, длина, толщина оболочки; $\xi$, $\varphi$ — безразмерные координаты в осевом и окружном направлениях ($\xi=x/R$).

Определение собственных колебаний предварительно напряженной оболочки сводится к определению ненулевых решений уравнения (1) при краевых условиях

$$w(0,\varphi,t)=w(\bar{l},\varphi,t)=0,\quad \bar{l}=l/R \qquad (3)$$

Решение для собственных колебаний предварительно напряженных оболочек представим в виде ряда

$$w=e^{i\omega t}\sum_{m,n}\sin\lambda_m\xi\,[A_{mn}\sin n(\varphi-\gamma\xi)+B_{mn}\cos n(\varphi-\gamma\xi)] \qquad (4)$$

где $\lambda_m=\dfrac{m\pi R}{l}$. В разложении (4) члены с косинусоидальным сомножителем осевого направления отсутствуют в связи с граничными условиями (3).

Выражение (4) представим в виде

$$w=e^{i\omega t}\sum_{mn}\left\{\frac{A_{mn}}{2}(\cos[n(\varphi-\gamma\xi)-\lambda_m\xi]-\cos[n(\varphi-\gamma\xi)+\lambda_m\xi])+\right.$$

$$\left.+\frac{B_{mn}}{2}(\sin[n(\varphi-\gamma\xi)+\lambda_m\xi]-\sin[n(\varphi-\gamma\xi)-\lambda_m\xi])\right\} \qquad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (1), получаем

$$\sum_{mn}\{A_{mn}\Psi(n,-m)\cos[n(\varphi-\gamma\xi)-\lambda_m\xi]-A_{mn}\Psi(n,m)\cos[n(\varphi-\gamma\xi)+\lambda_m\xi]+$$

$$+B_{mn}\Psi(n,m)\sin[n(\varphi-\gamma\xi)+\lambda_m\xi]-B_{mn}\Psi(n,-m)\sin[n(\varphi-\gamma\xi)-\lambda_m\xi]\}=0 \qquad (6)$$

$$\Psi(n,\pm m)=\varepsilon n^4(n^2-1)^2+\frac{E_1}{E_2}\mu_\pm^4+s_2^0\mu_\pm n^3(n^2-1)+t_2^0 n^4(n^2-1)-$$

$$-\Omega_2 n^2(n^2+1),\qquad \mu_\pm=\pm n\gamma+\lambda_m,\qquad \Omega_2=\rho R^2 E_2^{-1}$$

Отсюда получаем

$$A_{mn}[\Psi(n,-m)-\Psi(n,m)]=0,\qquad A_{mn}[\Psi(n,-m)+\Psi(n,m)]=0$$

$$B_{mn}[\Psi(n,m)-\Psi(n,-m)]=0,\qquad B_{mn}[\Psi(n,m)+\Psi(n,-m)]=0$$

Следовательно, для любой пары $m$, $n$ должно иметь место равенство

$$\Psi(n, m)=0, \qquad \Psi(n, -m)=0 \tag{7}$$

Таким образом, для существования нетривиального решения уравнения (1) при краевых условиях (3) необходимо и достаточно, чтобы нашлись целые $m$, $n$, удовлетворяющие условиям (7).

Соотношения (7) представляют собой следующие уравнения:

$$\Omega_2\omega^2=\frac{\varepsilon n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}+\frac{E_1}{E_2}\,\frac{(-n\gamma+\lambda_m)^4}{n^4(n^2+1)}+\frac{2s_2^0(-n\gamma+\lambda_m)\,n(n^2-1)}{n^2+1}+ \\ +\frac{t_2^0n^2(n^2-1)}{n^2+1}$$

$$\Omega_2\omega^2=\frac{\varepsilon n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}+\frac{E_1}{E_2}\,\frac{(-n\gamma-\lambda_m)^4}{n^4(n^2+1)}+\frac{2s_2^0(-n\gamma-\lambda_m)\,n(n^2-1)}{n^2+1}+ \\ +\frac{t_2^0n^2(n^2-1)}{n^2+1}$$

Отсюда получаем

$$\Omega_2\omega^2=\frac{\varepsilon n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}+\frac{E_1}{E_2}\,\frac{(n\gamma)^4+6(n\gamma)^2\lambda_m^2+\lambda_m^4}{n^4(n^2+1)}-\frac{2s_2^0(n\gamma)n(n^2-1)}{n^2+1}- \\ -\frac{t_2^0n^2(n^2-1)}{n^2+1} \tag{8}$$

$$(E_1/E_2)\left[(n\gamma)^3+(n\gamma)\lambda_m^2\right]-\frac{s_2^0}{2}\,n^3(n^2-1)=0 \tag{9}$$

На основании формулы (8) нетрудно заметить, что наименьшая частота в зависимости от $m$ реализуется при $m=1$.

Упростим выражение (8), используя равенство (9), тогда

$$\Omega_2\omega^2=\frac{\varepsilon n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}+\frac{E_1}{E_2}\,\frac{\lambda_1^4+2\lambda_1^2(n\gamma)^2-3(n\gamma)^4}{n^4(n^2+1)}+\frac{t_2^0n^2(n^2-1)}{n^2+1} \tag{10}$$

Введем обозначения

$$n\gamma=z, \quad s_2^0/s_*=\bar{s}_2, \quad t_2^0/t_*=\bar{t}_2, \quad s_*=\frac{(12\varepsilon)^{3/4}}{3\sqrt{2}}, \quad t_*=3\varepsilon \tag{11}$$

тогда формула (10) и соотношение (9) примут вид

$$\Omega_2\omega^2=\frac{\varepsilon n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}+\frac{E_1}{E_2}\,\frac{\lambda_1^4+2\lambda_1^2z^2-3z^4}{n^4(n^2+1)}+\frac{3\bar{t}_2\varepsilon n^2(n^2-1)}{n^2+1} \tag{12}$$

$$z^3+3pz+2q=0, \quad p=\frac{\lambda_1^2}{3}, \quad q=-\frac{E_2}{E_1}\bar{s}_2n^3(n^2-1)s_* \tag{13}$$

Представим $E_1$ и $E_2$ в следующем виде ($\alpha_1$, $\alpha_2$ — независимые параметры)

$$E_1=\alpha_1E, \quad E_2=\alpha_2E$$

Тогда

$$\bar{t}_2=\frac{\bar{t}}{\alpha_1},\quad \bar{t}=\frac{t^0}{t_*},\quad t^0=-\frac{qR}{Eh}$$

$$q=-\frac{\bar{s}}{\alpha_1}n^3(n^2-1)s_*,\quad \bar{s}=\frac{s^0}{s_*},\quad s^0=\frac{\tau^0}{E} \tag{14}$$

Так как дискриминант уравнения (13) $D>0$, то имеем одно действительное решение

$$z=u_1+u_2,\quad u_{1,2}=(-q\pm\sqrt{q^2+p^3})^{1/3} \tag{15}$$

В частности, на основании выражений (12), (13) для изотропной оболочки ($\alpha_1=\alpha_2=1$) при $t^0=s^0=0$ имеем $\gamma=0$ и известную формулу $\Omega\omega_0^2=[n^4(n^2-1)^2+\varepsilon_1^2][n^2(n^2+1)]^{-1}$, $\Omega=\rho R^2E^{-1}$.

Введем геометрический параметр

$$\beta=\alpha_1\varepsilon^{-1/2} \tag{16}$$

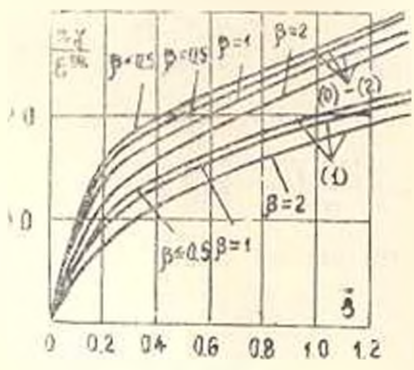
и рассмотрим оболочки для различных $\beta$.

Выражение $n\gamma$ на основании (14), (15) имеет вид

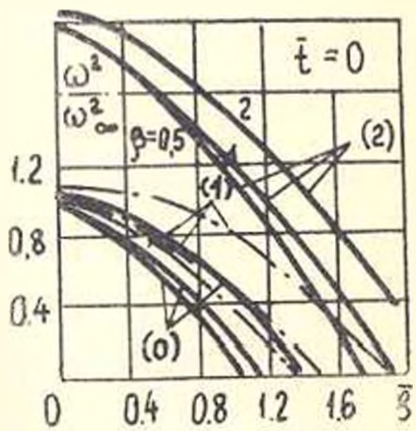
$$n\gamma=\left\{\left|\sqrt{2}(12)^{3/4}\frac{\bar{s}}{\alpha_1}+\sqrt{2(12)^{3/2}\left(\frac{\bar{s}}{\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\beta}{3}\right)^3}\right|^{1/3}+\left|\sqrt{2}(12)^{3/4}\frac{\bar{s}}{\alpha_1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{2(12)^{3/2}\left(\frac{\bar{s}}{\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\beta}{3}\right)^3}\right|^{1/3}\right\}\varepsilon^{3/4} \tag{17}$$

На фиг. 1 представлены кривые изменения значений $n\gamma$ в зависимости от предварительного сдвигающего напряжения $\bar{s}$ (при $n=2$), когда $\beta=0,5; 1; 2$ для различных значений ($\alpha_1=\alpha_2=1$) (0), ($\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$) (1), ($\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$) (2).

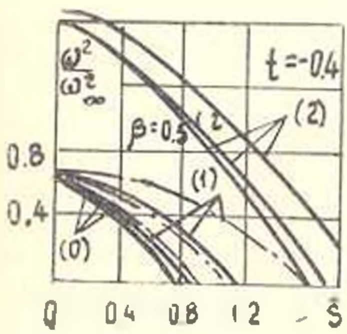



Фиг. 1

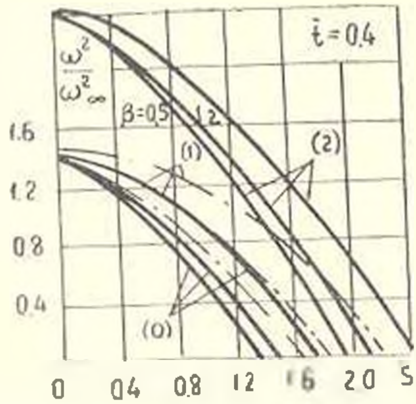



Фиг. 2.

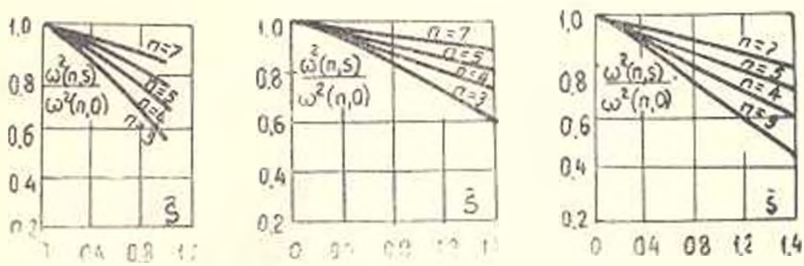
На фиг. 2, 3, 4 приведены кривые изменения частоты $\omega$ в зависимости от $\bar{s}$ для случаев (0), (1), (2), когда $\bar{t}=0$; $-0,4$; $0,4$ (положительные значения $\bar{t}$ соответствуют внутреннему давлению; отрицательные — внешнему давлению). По оси ординат на этой фигуре отложена безразмерная частота $\omega^2/\omega_\infty^2$ $\left(\omega_\infty^2=\Omega-\frac{36}{5}t\right)$, а по оси абсцисс—безразмерная величина $\bar{s}$. Критические нагрузки получаются как точки пересечения с осью абсцисс кривых, выражающих зависимость наименьшей частоты от нагрузки.




Фиг. 3.




Фиг. 4.




Фиг. 5.

На основании формулы (15), аналогичным образом, нетрудно определить значения $n_\gamma$ при $n=3, 4, 5, \ldots$ Подставляя эти значения $n$ и $n_\gamma$ для фиксированных значений $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\bar{s}$, $\bar{t}$ в формулу (12), получаем соответствующие значения $\omega$. В частности, на фиг. 5 приведены кривые изменения частоты в зависимости от $\bar{s}$ при $n=3, 4, 5, \ldots$ для $\beta=0,5$; 1; 2 (при $\bar{t}=0,4$), для случаев (0), (1), (2). При этом соответствующие частотные кривые (для фиксированного $n$), в отличие от низшей частоты, для приведенных значений $\beta$ практически сливаются. Аналогичным образом нетрудно построить кривые и для иных значений исследуемых параметров.

Таким образом, показана степень влияния параметров ортотропии на частотные характеристики предварительно закрученной оболочки как при действии внешнего, так и внутреннего давления. На основании приведенных кривых нетрудно заметить, что влияние параметров $E_1$ и $E_2$ на частотные характеристики в зависимости от значений нормального давления и крутящих моментов различно: если при малых значениях $\bar{s}$ большую роль оказывает величина радиального модуля упругости $E_2$, то по мере возрастания $\bar{s}$ роль продольного модуля упругости $E_1$ возрастает и тем больше, чем больше параметр $\beta$. Отмечено существенное влияние исследуемых факторов на низшие частоты и сравнительно слабое на высшие частоты.

На основании соотношений (12), (13) нетрудно получить критические зависимости для $\bar{s}$ и $\bar{t}$ (для различных значений $\alpha_1$ и $\alpha_2$).

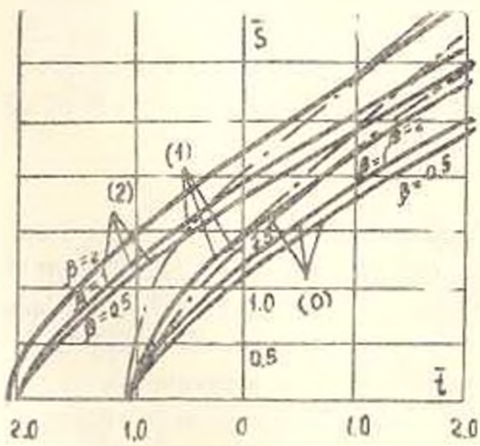
При $\omega=0$ из этих формул получаем

$$t = \alpha_2 \frac{n^2-1}{3} + \alpha_1 \frac{\lambda_1^4 + 2\lambda_1(n\gamma)^2 - 3(n\gamma)}{3\varepsilon n^4(n^2-1)}, \quad \bar{t} = \frac{t^0}{t_*}, \quad t^0 = -\frac{qR}{Eh} \tag{18}$$

$$(n\gamma)^3 + \lambda_1(n\gamma) - \alpha_1^{-1}\frac{\bar{s}}{2} n^2(n^2-1)s_* = 0, \quad \bar{s} = \frac{s^0}{s_*}, \quad s^0 = \frac{\tau^0}{E} \tag{19}$$

В частности, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $s^0 = 0$ на основании (18), (19) имеем $n\gamma = 0$ и $\bar{t} = \frac{1}{3}\{(n^2-1) + \lambda_1^4[\varepsilon n^4(n^2-1)]^{-1}\}$, откуда для достаточно длинных оболочек, при $n=2$, получаем известную формулу $t_* = 3\varepsilon$.

Согласно формуле (19) получаем зависимость $n\gamma(\bar{s})$. Поэтому, задавая $\bar{s}$, для фиксированного $n$ получаем соответствующее значение $n\gamma$. Подставляя это значение $n\gamma$ (при $n=2$) в формулу (18), получаем соответствующее критическое значение $t_*$. На фиг. 6, для вышерассмотренных случаев (0), (1), (2) приведены зависимости $\bar{t}_*(\bar{s}_*)$ для $\beta = 0{,}5;\ 1;\ 2$.




Фиг. 6.

При $\bar{t} = 0$, $n = 2$ уравнение (18) принимает вид

$$3\alpha_1 z^2 - 2\alpha_1 z - (\lambda_1^4\alpha_1 + 12^2\varepsilon\alpha_2) = 0$$

Положительный корень этого уравнения имеет вид

$$z = \frac{\lambda_1^4}{3}\left[1 + \sqrt{1 + 3\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\frac{144\varepsilon}{\lambda_1^{8}}\right)}\right] \tag{20}$$

Если принять, что

$$(\alpha_1/\alpha_2)^{1/2}\lambda_1^2\varepsilon^{-1/2} \leqslant 12 \tag{21}$$

то формула (20) принимает вид

$$z = \frac{\lambda_1^2}{3}\left[1+12\sqrt{3}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda_1^2\varepsilon^{-1/2}}\right] \tag{22}$$

Подставляя это значение $n_1$ в формулу (19), имеем

$$s_*^0 = \alpha_1^{1/4}\alpha_2^{3/4}\frac{(12\varepsilon)^{3/4}}{3\sqrt{2}}\left[1+\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{1/2}\frac{\lambda_1\varepsilon^{-1/2}}{12\sqrt{3}}\right]\left[1+4\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{1/2}\frac{\lambda_1\varepsilon^{-1/2}}{12\sqrt{3}}\right] \tag{23}$$

При рассмотрении достаточно длинных оболочек, когда

$$(\alpha_1/\alpha_2)^{1/2}\lambda_1\varepsilon^{-1/2} \leqslant 0{,}5 \tag{24}$$

формула (23) упрощается и принимает вид

$$s_*^0 = \alpha_1^{1/4}\alpha_2^{3/4}\frac{(12\varepsilon)^{3/4}}{3\sqrt{2}} \tag{25}$$

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ из (25) получаем известную формулу Тимошенко для критического крутящего момента достаточно длинных оболочек, где влияние граничных условий не учитывалось [5]. Следовательно, отсюда получаем, что при выполнении неравенства (24), граничными условиями можно пренебречь. При этом учитывалось, что неучтенные граничные условия практически мало существенны, так как наибольшее расхождение между критическими сдвигающими усилиями длинных оболочек для граничных условий: $w = u = 0$ и $w = T_1 = 0$ составляет величина около 10% [7], тогда как условия по $v$, $s$, $w_x$, $w_{xx}$ являются несущественными [8], [9]. В то же время, из работы [4] следует, что критическое сдвигающее усилие, полученное при удовлетворении главных граничных условий $w = 0$, дает достаточно хорошую аппроксимацию результатов как для граничных условий свободного опирания, так и жесткого закрепления.

Рассмотренные вопросы представляют существенный интерес при динамических расчетах предварительно закрученных длинных ортотропных оболочек, подверженных действию нормального давления.

## ABOUT VIBRATIONS AND STABILITY OF LONG ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS UNDER ACTION OF TORSION AND PRESSURE

S. N. KUKUDJANOV

## ՈԼՈՐՄԱՆ ԵՎ ՃՆՇՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՆԵՐՔՈ ԵՐԿԱՐ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ս. Ն. ԿՈՒԿՈՒՋԱՆՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հետազոտված է ոլորման և ներքին ճնշման (ինչպես արտաքին, այնպես էլ ներքին) նախնական գործող ուժերի ազդեցությունը երկար օրթոտրոպ

ռանային թաղանթների սպեկտրալ բնութագրիչները դիտարկված է նաև կայունության հարցը:

Հետազոտումը կատարված է կիսաանմոմենտ տեսության հիման վրա: Լուծման ժամանակ հաշվի են առնվել գլխավոր եզրային պայմանները: Ստացված են ցածր հաճախականությունների որոշման համար բանաձևեր՝ կախված պտտող մոմենտի, նորմալ ճնշման, երկրաչափության և թաղանթի օրթոտրոպիայի պարամետրերից, ինչպես նաև կրիտիկական պտտող մոմենտների նորմալ ճնշումից կախվածության կորերը:

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Даревский В. М., [illegible]* Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при кручении и нормальном давлении. Прочность цилиндрических оболочек.—М.: Госиздат оборон. промыш., 1959, с. 95—108.
2. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек.—М.: Судпромгиз, 1962. 344 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т. 3. Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко.—М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
4. *Тонтин Н. Е.* К вопросу об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении.—Прикл. механика, 1980, 16, №9, с. 132—134.
5. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем.—М.-Л.: Гостехиздат, 1955. 565 с.
6. *Кукуджанов С. Н.* Влияние тангенциальных граничных условий на собственные колебания предварительно напряженной ортотропной цилиндрической оболочки.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, №5, с. 19—26.
7. *Алумяэ Н. А.* Критическая нагрузка длинной цилиндрической круговой оболочки при кручении.—Прикл. матем. и мех., 1954, т. 18, вып. 1, с. 27—34.
8. *Yamaki N., Kodama S.* Buckling of circular cylindrical shells under torsion.—Rept Inst. High Speed Mech. Japan, Rept 1: 1965—1966, v. 17, № 168, pp. 171—184; Rept 2: 1966—1967, v. 18, № 17[illegible], pp. 121—142.
9. *Batdorf S. B., Stein M., Schildcrout M.* Critical stress of thin-walled cylinders in torsion.—NACA, Techn. Note, 1947, № 1344.



Институт математики
АН Грузии



Поступила в редакцию
13.III.1990