

УДК 532.5+536.24

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

ПЕТРОСЯН Л.Г.

Рассматривается теплообмен в случае установившегося ламинарного плоского течения структурной несимметричной несжимаемой жидкости в окрестности критической точки. Показано, что учет микроструктуры жидкости увеличивает толщину теплового пограничного слоя, формируемого вблизи поверхности твердого тела, имеющей вьюю температуру, что изменяет интенсивность теплообмена между жидкостью и телом, по сравнению с ньютоновскими жидкостями.

В основу континуумов с внутренней структурой введены дополнительные континуальные переменные, помимо обычных лагранжевого смещения, плотности и температуры. Для этих континуумов характерны локальные вращательные степени свободы наряду с трансляционными, присущими и обычной классической жидкости.

В динамике структурных (несимметричных) жидкостей вращательные степени свободы учитываются путем введения в законы сохранения внутреннего "спинного" момента количества движения.

В основу нижеизложенной работы положена модель с тремя вращательными степенями свободы, где локальное вращение рассматривается как кооперативный молекулярный процесс, характеризуемый в каждой точке среды среднемолекулярным моментом количества движения и моментом инерции [1].

Рассмотрим теплообмен при установившемся ламинарном плоскопараллельном течении несимметричной несжимаемой вязкой жидкости в окрестности критической точки (фиг.1). Течение возле этой точки характеризуется тем, что притекающая из бесконечности к плоской стенке, поставленной поперек течения, жидкость разделяется на потоки, направленные в противоположные стороны от критической точки.

Задача плоскопараллельного течения структурной жидкости вблизи критической точки рассматривалась в работе [2], где автор исходил из приближенных уравнений пограничного слоя. Это привело к независимости решения от начального потока протекающей жидкости, кроме того, это исклю-

чилось возможность определения распределения давления по потоку [3,4]. Точное решение уравнений движения структурных несимметричных жидкостей приведено в работе [5-8]. Задача теплообмена в окрестности критической точки для несимметричных жидкостей рассматривалась в работах [9,10], где авторы исходили из приближенных уравнений динамического и теплового пограничных слоев.

Ниже рассматривается точное решение уравнений движения и теплообмена (энергии) структурных несимметричных жидкостей.

1. Основные уравнения движения. Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [8,11]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla \vec{v})^d + \nu_r \nabla \times [2\vec{\omega} - \nabla \times \vec{v}] + \vec{f} \\ I \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0 \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega}) + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^d + \\ &+ 2c_a \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^a + \vec{c} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ —массовая плотность жидкости, p —давление, I —скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, \vec{v} —вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ —вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν —кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r —кинематическая вращательная вязкость, c_0 , c_d , c_a —коэффициенты моментной вязкости, $d(\dots)/dt$ —полная производная по времени, ∇ —пространственный градиент, $(\nabla \vec{v})^d$ и $(\nabla \vec{\omega})^d$ —симметричные части соответствующих диад, $(\nabla \vec{v})^a$ и $(\nabla \vec{\omega})^a$ —антисимметричные диады, \vec{f} —вектор массовой силы, \vec{c} —вектор массового момента.

К активным массовым силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу, возникающую вследствие изменений объема, связанных с нагреванием.

В работе [4] показано, что массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения лишь в том случае, если соотношение между числом Грасгофа $G_r = g\beta L^3(\Delta T)_0/\nu^2$ и числом Рейнольдса $R = V_0 L/\nu$ равно $G_r \approx R^2$, где g —ускорение свободного падения, β —коэффициент кубического расширения, $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$ —разность температур тела(стенки) и жидкости, L —характерная длина, V_0 —характерная скорость.

Такое соотношение между числом Грасгофа и числом Рейнольдса может существовать только при очень малых скоростях течения и значительных разностях температур.

Анализ системы уравнения (1.1) показывает, что в случае модели структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений, учитывающей внутренние степени свободы, массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами трения и инерции, если $G_r \approx R^2$, то есть учет вращения частицы жидкости не приносит ничего нового.

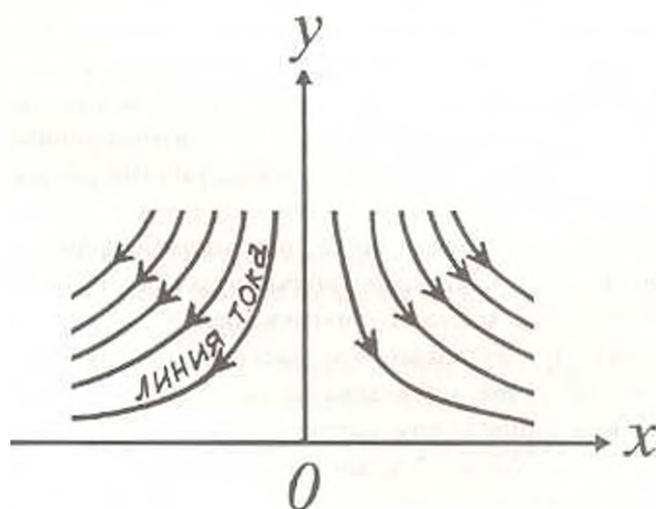
Таким образом, архимедову подъемную силу в уравнениях (1.1) можно учитывать при умеренно больших скоростях (при больших числах Рейнольдса) и при малых разностях температур [4]. Известно, что такие течения называются вынужденными конвективными течениями [4]. В случаях, когда архимедову подъемную силу в уравнении движения (1.1) можно отбросить, а вязкости считать не зависящими от температуры, распределение скоростей становится независимым от распределения температуры.

2. Плоскопараллельное течение в окрестности критической точки. Установившееся ламинарное плоскопараллельное течение несжимаемой несимметричной жидкости в окрестности критической точки (фиг.1) были рассмотрены в работах [5-8].

Для распределения u , v (u , v — проекции поступательной скорости точки соответственно на оси x , y) и ω (ω — проекция вектора угловой скорости вращения частицы на ось z), а также распределения давления имеем [5-8]

$$\left(1 + \frac{\nu_r}{\nu}\right) f''' + f f'' - f'^2 + 1 = -2 \frac{\nu_r}{\nu} \varphi' \quad (2.1)$$

$$\left(1 + \frac{\nu_r}{\nu}\right) f'' + f f' - p_1' = -2 \frac{\nu_r}{\nu} \varphi \quad (2.2)$$



Фиг.1

$$\frac{\gamma}{\nu} \varphi'' - \frac{4\nu_r}{l a_0} + f \varphi' - f' \varphi - \frac{2\nu_r}{l a_0} f'' = 0, \quad \left(\gamma = \frac{c_3 + c_4}{l}\right) \quad (2.3)$$

При получении решения (2.1)–(2.3) были введены безразмерные переменные

$$x^* = x \left(\frac{a_0}{\nu}\right)^{1/2}, \quad y^* = y \left(\frac{a_0}{\nu}\right)^{1/2}, \quad u^* = \frac{u}{(a_0 \nu)^{1/2}}$$

$$v^* = \frac{V}{(a_0 \nu)^{1/2}}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{a_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho a_0 \nu} \quad (2.4)$$

а решение искалось в виде

$$\begin{aligned} u^* &= x^* f'(y^*), \quad v^* = -f(y^*), \quad \omega^* = x^* \varphi(y^*) \\ p^* &= p_0^* - [x^{*2} - p_1(y^*)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по y^* ; $f(y^*)$, $\varphi(y^*)$, $p_1(y^*)$ — искомые функции y^* ; p_0^* — безразмерное давление в критической точке (давление торможения), a_0 — параметр с размерностью, обратный времени, характеризующий начальный поток.

Давление p в произвольной точке потенциального течения определяется из уравнения Бернулли и равно

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2}(U^2 + V^2) = \frac{\rho}{2} a_0^2 (x^2 + y^2)$$

где $U = a_0 x$, $V = -a_0 y$ — составляющие скорости потенциального течения (без трения) несжимаемой жидкости в окрестности критической точки.

Граничными условиями, которым должны удовлетворять функции $f(y^*)$, $p_1(y^*)$, будут [4]

$$f(0) = f'(0) = p_1(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (2.6)$$

Можно представить, что на стенке угловая скорость вращения частиц $\omega(0)$ равна нулю (условие прилипания), а на большем расстоянии от стенки, при $y = \infty$ будет $\omega(\infty) = 0$ [5,8,12,13].

Тогда

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (2.7)$$

Численные решения системы дифференциальных уравнений (2.1) и (2.3) при граничных условиях (2.6) и (2.7) для различных значений ν_r/ν , γ/ν , $\nu_r/\nu a_0$ выполнены на ЭВМ. Результаты этих решений приведены в работах [5,6,8].

Анализ указанных численных решений показывает, что учет локальных вращательных степеней свободы частицы среды (несимметричность тензора напряжений) приводит к увеличению толщины динамического пограничного слоя по сравнению с ньютоновскими жидкостями, причем, чем больше отношение ν_r/ν , тем больше толщина пограничного слоя [6,8].

3. Составление уравнения энергии. Из уравнения "первого закона термодинамики" для систем с несимметричным тензором напряжений имеем [8]

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = -p \nabla \cdot \bar{v} + \rho \Phi + \nabla \cdot (\chi \nabla T) \quad (3.1)$$

где

$$\bar{q} = -\chi \nabla T$$

Здесь ϵ — удельная внутренняя энергия, \bar{q} — вектор потока тепла через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности, χ — коэффициент теплопроводности, T — абсолютная температура, Φ — скорость диссипации механической энергии (на единицу массы жидкости), обусловленная вязкостью жидкости.

$$v^* = \frac{v}{(a_0 \nu)^{1/2}}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{a_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho a_0 \nu} \quad (2.4)$$

а решение искалось в виде

$$\begin{aligned} u^* &= x^* f'(y^*), \quad v^* = -f(y^*), \quad \omega^* = x^* \varphi(y^*) \\ p^* &= p_0^* - [x^{*2} - p_1(y^*)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по y^* ; $f(y^*)$, $\varphi(y^*)$, $p_1(y^*)$ — искомые функции y^* ; p_0^* — безразмерное давление в критической точке (давление торможения), a_0 — параметр с размерностью, обратный времени, характеризующий начальный поток.

Давление p в произвольной точке потенциального течения определяется из уравнения Бернулли и равно

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2}(U^2 + V^2) = \frac{\rho}{2} a_0^2 (x^2 + y^2)$$

где $U = a_0 x$, $V = -a_0 y$ — составляющие скорости потенциального течения (без трения) несжимаемой жидкости в окрестности критической точки.

Граничными условиями, которым должны удовлетворять функции $f(y^*)$, $p_1(y^*)$, будут [4]

$$f(0) = f'(0) = p_1(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (2.6)$$

Можно представить, что на стенке угловая скорость вращения частиц $\omega(0)$ равна нулю (условие прилипания), а на большем расстоянии от стенки, при $y = \infty$ будет $\omega(\infty) = 0$ [5,8,12,13].

Тогда

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (2.7)$$

Численные решения системы дифференциальных уравнений (2.1) и (2.3) при граничных условиях (2.6) и (2.7) для различных значений ν_r/ν , γ/ν , $\nu_r/10a_0$ выполнены на ЭВМ. Результаты этих решений приведены в работах [5,6,8].

Анализ указанных численных решений показывает, что учет локальных вращательных степеней свободы частицы среды (несимметричность тензора напряжений) приводит к увеличению толщины динамического пограничного слоя по сравнению с ньютоновскими жидкостями, причем, чем больше отношение ν_r/ν , тем больше толщина пограничного слоя [6,8].

3. Составление уравнения энергии. Из уравнения "первого закона термодинамики" для систем с несимметричным тензором напряжений имеем [8]

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \nabla \cdot \bar{v} + \rho \Phi + \nabla \cdot (\chi \nabla T) \quad (3.1)$$

где

$$\bar{q} = -\chi \nabla T$$

Здесь e — удельная внутренняя энергия, \bar{q} — вектор потока тепла через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности, χ — коэффициент теплопроводности, T — абсолютная температура, Φ — скорость диссипации механической энергии (на единицу массы жидкости), обусловленная вязкостью жидкости.

В том случае, когда скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемыми ими изменениями термодинамических величин можно пренебречь. При определении производных от термодинамических величин в этом случае давление надо считать постоянным. Тогда будем иметь следующее термодинамическое соотношение [14]:

$$T \frac{ds}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} \quad (3.2)$$

где λ — удельная вязкость, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Используя уравнение сохранения энергии (3.1), соотношение (3.2) перепишем в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{1}{c_p} \Phi \quad (3.3)$$

Здесь были использованы также термодинамическое соотношение Гиббса и уравнение неразрывности в форме [15]

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{dc}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt}, \quad \rho \frac{d(1/\rho)}{dt} = \nabla \cdot \vec{v}$$

4. Распределение температуры в окрестности критической точки. Рассмотрим процесс теплообмена неограниченного стационарного плоского потока жидкости с постоянными физическими свойствами и пластины $T_w = \text{const}$, расположенной нормально к направлению его скорости в окрестности критической точки.

Для плоского течения в окрестности критической точки уравнение энергии (3.3) (уравнение распределения температуры) примет вид

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \rho \Phi \quad (4.1)$$

Пренебрегая теплом, возникающим вследствие трения ($\Phi = 0$), получим автомодельное решение для уравнения энергии (4.1).

Имея в виду (2.4), дополнительно введем безразмерную температуру в форме

$$\theta^* = \frac{T - T_w}{T_w - T_\infty} \quad (4.2)$$

где T_∞ — температура на большом расстоянии от тела.

Тогда уравнение энергии (4.1), без учета вязкой диссипации, в безразмерной форме запишется так:

$$u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (4.3)$$

Здесь $Pr = \nu/a = \nu c_p \rho / \lambda$ — число Прандтля.

Решение уравнения (4.3) будем искать в форме (2.5), дополнительно приравняв

$$\theta^* = \theta^*(y^*) \quad (4.4)$$

Подставляя первое и второе выражения равенств (2.5) и (4.4) в уравнение (4.3), находим

$$\theta^{*''} + P_r f \theta^{*'} = 0 \quad (4.5)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по y^* ; $\theta^*(y^*)$ —искомая функция y^* .

Граничными условиями для температуры будут

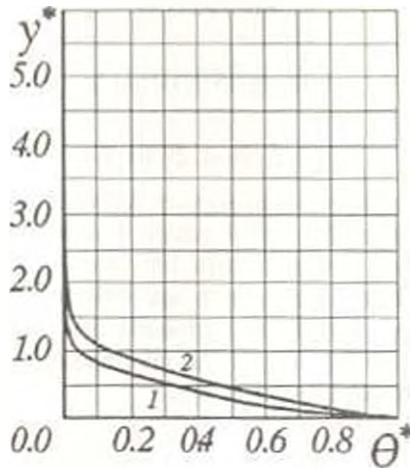
$$T = T_w \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$T = T_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty$$

Тогда граничными условиями для искомой функции $\theta^*(y^*)$ будут

$$\theta^* = 1 \quad \text{при} \quad y^* = 0$$

$$\theta^* = 0 \quad \text{при} \quad y^* = \infty \quad (4.6)$$



Фиг.2

Численные решения системы дифференциальных уравнений (2.1), (2.3) и (4.5) при граничных условиях (2.6), (2.7) и (4.6) для различных значений ν_r/ν , γ/ν , ν_r/Ia_0 , и числа P_r выполнены на ЭВМ.

Результаты этих решений для распределения безразмерной температуры проиллюстрированы на фиг.2. Кривая 1 построена для $P_r = 10$ ($-\theta^{*'} = 1,3390$) и $\nu_r/\nu = \gamma/\nu = \nu_r/Ia_0 = 0$ (классический профиль—ньютоновская жидкость); кривая 2 построена для $P_r = 10$ ($-\theta^{*'} = 1,0267$) и $\nu_r/\nu = 4,5$; $\gamma/\nu = 1,5$; $\nu_r/Ia_0 = 0,75$.

Как видно из фиг.2, учет микроструктуры жидкости увеличивает толщину теплового пограничного слоя, формируемого вблизи поверхности твердого тела, имеющей иную температуру, что изменяет интенсивность теплообмена между жидкостью и телом по сравнению с ньютоновскими жидкостями.

Таким образом, распределение температуры в пограничном слое несимметричной жидкости сильно отличается от соответствующей кривой для ньютоновской жидкости. Следовательно, учет локальных степеней свободы частицы среды (несимметричность тензора напряжения) приводит существенному изменению характера теплообмена стенкой и обтекающей ее жидкостью, что имеет важное практическое значение.

HEAT TRANSFER UNDER PLANE FLOWING OF NON-SYMMETRIC FLUID IN THE NEIGHBOURHOOD OF CRITICAL POINT

PETROSIAN L.G.

ՋԵՐՄԱՓՈՒԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ՇՐՋԱԿԱՅԲՈՒՄ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀԱՐԹ ՀՈՍՔԻ ԴԵՊՐՈՒՄ

Լ.Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է ջերմափոխանակությունը կրիտիկական կետի շրջակայքում կառուցվածքային ոչ սիմետրիկ աճսեղմելի հեղուկի հաստատված լամինար հարթ շարժման դեպքում: Ցույց է տրված, որ հեղուկի միկրոկառուցվածքի հաշվառումը մեծացնում է այլ ջերմաստիճան ունեցող պինդ մարմնի մակերեսի շրջակայքում ձևավորվող ջերմային սահմանային շերտի հաստությունը, որը փոխում է հեղուկի եւ մարմնի միջև ջերմափոխանակման ինտենսիվությունը՝ նյութական հեղուկների համեմատությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аоро Э.Л., Булыгин А.Н. Гидромеханика жидких кристаллов. — Итоги науки и техники, серия Гидромеханика, М.: 1973, т.7, с.106-123.
2. Peddison J.Jr., McNitt R.P. Boundary-layer theory for a micropolar fluid.—Recent Advances in Engineering Science, 1968, v.5, pp.405-426.
3. Ботчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.:Мир, 1973, 760 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.—М.: Наука, 1974, 711 с.
5. Петросян Л.Г. К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей.—Прим.Механика, 1976, т.12, но.11, с.103-109.
6. Петросян Л.Г. К вопросу течения структурных жидкостей в окрестности критической точки.—Уч.зап.ЕГУ, 1980, но.1, с.24-30.
7. Petrosjan L.G. Konstruktion eines Modeles der Magnetohydrodynamik asymmetrischer Flüssigkeiten. — Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete Mathematics Abstracts, Berlin, Heidelberg, New-York, 1978, Band 366, pp.462-464.
8. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений.—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984, 308с.

9. Gorla R.S.R. Thermal boundary layer of a micropolar fluid at a stagnation point.— *Int.J.Eng.Sci.*, 1980, v.18, no.4, pp.611-617.
10. Ramachandran P. Subhadra, Matur M.N. Heat transfer in the stagnation point flow of a micropolar fluid.— *Acta Mech.*, 1980, v.36, no.3-4, pp.247-261.
11. Нгуен Вян Дьеп, Листров А.Т. О нелинейной модели несимметричных жидкостей.— *Изв АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1967, no.5, с.132-136.
12. Петросян Л.Г. Об одной задаче пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями.— *Изв АН Арм ССР. Механика*, 1973, т.26, no.3, с.47-57.
13. Петросян Л.Г. Осесимметричное течение несимметричной несжимаемой вязкой электропроводной жидкости вблизи критической точки в магнитном поле.— *Уч.записки ЕГУ*, 1980, no.2, с.36-41.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*.— М.: Наука, 1986, 736 с.
15. Де Гроот С., Мапур П. *Неравновесная гидродинамика*.— М.: Мир, 1964, 456 с.

*Ереванский государственный
университет*

*Поступила в редакцию
7. VII.1989*