ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 534.13:536.246

О СВОБОДНЫХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ОГАНЯН Г.Г.

Рассматривается задача о влиянии тепловых эффектов на свободные малые колебания газового пузырька в несжимаемой жидкости в линейной упрощенной постановке. Выделены два режима колебаний, реализующихся при термодинамических поведениях газа в пузырьке, примыкающих к изотермическому и адиабатическому. Выведены простые формулы для вычисления величин декремента затухания за счет теплообмена при квазиизотермическом и квазиадиабатическом режимах колебаний. Для водо-воздушной и водо-гелиевой смесей проведено сравнение полученных результатов с известными и, тем самым, получены интервалы изменения радиуса пузырька, в которых колебательные режимы различны.

Важность учета тепловых эффектов, существенно влияющих на собственную частоту колебаний, показана в [1,2]. Аналогичная задача в нелинейной постановке численно исследовалась в [3,4]. В [5] в точной линейной постановке изучалась динамика парогазового пузырька в жидкости. Известно, что при адиабатическом и изотермическом предельных термодинамических поведениях газового пузырька тепловой поток от пузырька в жидкость отсутствует. Однако, в реальных газожидкостных смесях может происходить интенсивный теплообмен за счет динамического взаимодействия газового пузырька с окружающей жидкостью, при этом количество тепла, отданное в процессе сжатия пузырьком в жидкость, не равно обязательно количеству тепла, полученному пузырьком от жидкости в процессе расширения [6]. Тем самым, может иметь место диссипация кинетической энергии смеси за счет необратимого межфазного теплообмена. Различные физические процессы, влияющие на диссипацию энергии, рассмотрены в [2,7,8].

В настоящей работе аналитически исследуется подобная [3] линейная задача в упрощенной постановке. Выделены два режима колебаний, реализующиеся при термодинамических поведениях газа в пузырьке, близких (но не совпадающих) к изотермическому и адиабатическому. Выведены простые формулы для вычисления величин декремента затухания за счет теплообмена. Для двух видов газожидкостных смесей проведено сравнение полученных результатов с известными [2,3,5].

1. **Основные уравнения.** Пусть сферически-симметричный одиночный газовый пузырек находится в безграничной несжимаемой идеальной жидкости. Учитывая, что в газе величина коэффициента теплопроводности k_2 намного меньше аналогичного коэффициента в жидкости, будем считать, что теплообмен пузырька с жидкостью обусловлен лишь тепловым сопротивлением газа и поэтому температуру жидкости примем постоянной. Полагая, что эффекты дробления отсутствуют и не происходит изменения сферической формы пузырька, ограничимся рассмотрением малых гармонических колебаний. Принимая, что газ подчиняется уравнению состояния калорически совершенного газа, уравнения, описывающие радиальное движение сферически-симметричного газового пузырька, возьмем в виде [6]

$$P_2 - P_1 = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2}\rho_1 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2, \ \rho_1 = \text{const} \tag{1.1}$$

$$P_2 = c_{v2}(\gamma - 1)\rho_2 T_2, \ \rho_2 R^3 = \text{const}, \ \ \gamma = c_{p2}/c_{v2}$$

$$\frac{dP_2}{dt} + \frac{3\gamma P_2}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{3(\gamma-1)k_2 \mathrm{Nu}}{2R^2}(T_2 - T_0) = 0$$

Здесь индексы 1 и 2 отнесены соответственно к жидкости и газу, P—давление, ρ—плотность, R—радиус пузырька, T—температура, $T_0 = \text{const}$—температура жидкости, t—время, c_p и c_v—удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме, Nu—безразмерное число Нуссельта. Последнее уравнение из системы (1.1) обеспечивает однородное изменение давления газа в пузырьке.

При свободных колебаниях давление P_1 в жидкости вдали от пузырька не меняется, то есть $P_1 = P_0 = \text{const}$. Предположим, что в любой момент времени отклонения параметров колебания от соответствующих значений в невозмущенном состоянии малы

$$P_2 = P_0(1 + \varepsilon P_2'), \ \rho_2 = \rho_{20}(1 + \varepsilon\rho_2'), \ R = R_0(1 + \varepsilon R'), \ T_2 = T_0(1 + \varepsilon T_2')$$

После линеаризации систему (1.1) можно свести к одному уравнению относительно возмущения радиуса пузырька

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d^2 R}{d\tau^2} + \omega_{\mathrm{ar}}^{*2} R\right) = -\nu_T \left(\frac{d^2 R}{d\tau^2} + \omega_{\mathrm{ir}}^{*2} R\right) \tag{1.2}$$

Здесь штрихи опущены и введены обозначения

$$\omega_{\mathrm{ar}}^{*2} = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1}\frac{t_*^2}{R_0^2}, \ \omega_{\mathrm{ir}}^{*2} = \frac{3P_0}{\rho_1}\frac{t_*^2}{R_0^2}, \ \nu_T = \frac{3\gamma}{2}\frac{t_*}{t_T}\mathrm{Nu} = \frac{6\pi\gamma \mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}$$

$$\mathrm{Pe} = \frac{2R_0^2\omega_r}{\lambda_2} = 2\omega_r t_T, \ \tau = \frac{t}{t_*}, \ t_* = \frac{2\pi}{\omega_r}, \ t_T = \frac{R_0^2}{\lambda_2}$$

где λ_2—коэффициент температуропроводности газа, t_T—время тепловой релаксации, t_*—период пульсации пузырька. Из (1.2) следуют предельные уравнения, описывающие изотермический и адиабатический режимы свободных колебаний пузырька. Первый из них реализуется при больших значениях параметра ν_T ($\nu_T \to \infty$), который соответствует малым значениям числа Пекле

(Pe→ 0). Оставляя в (1.2) правую часть уравнения, получим искомое уравнение, из которого следует формула резонансной частоты Миннаерта для изотермического режима колебаний пузырька:

$$\omega_{ir} = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3P_0}{\rho_1}} \equiv \frac{1}{t_*}\omega_{ir}^*$$

Второй из предельных режимов реализуется при очень больших значениях числа Пекле (Pe→ ∞). Удерживая в (1.2) левую часть уравнения, приходим ко второму предельному уравнению, из которого следует формула Миннаерта для адиабатического режима колебаний

$$\omega_{ar} = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_1}} \equiv \frac{1}{t_*}\omega_{ar}^*$$

Решение уравнения (1.2) будем искать в виде $R \sim A\exp(k\tau)$, где $A =$const и k удовлетворяет характеристическому уравнению

$$k^3 + \nu_T k^2 + \omega_{ar}^{*2} + \nu_T \omega_{ir}^{*2} k = 0 \qquad (1.3)$$

Для получения приближенных аналитических зависимостей решение уравнения (1.3) будем искать для двух режимов колебаний, примыкающих (но не совпадающими) к изотермическому и адиабатическому.

2. Квазиизотермический режим ($\nu_T > 1$). При изотермическом режиме имеем

$$k = k_0 = \pm i\omega_{ir}^*$$

Решение уравнения (1.3) ищем в виде ряда по обратным степеням безразмерного большого параметра ν_T

$$k = k_0 + k_1/\nu_T + k_2/\nu_T^2 + k_3/\nu_T^3 + \cdots$$

подстановка которого в уравнение (1.3) и последующее приравнивание членов при одинаковых степенях $1/\nu_T$ дает

$$k_1 = -\frac{\gamma-1}{2}\omega_{ir}^{*2},\ k_2 = \pm i\frac{(\gamma-1)(5-\gamma)}{8}\omega_{ir}^{*3},\ k_3 = \frac{(\gamma-1)(2-\gamma)}{2}\omega_{ir}^{*4}$$

Ограничиваясь рассматриваемым приближением, решение уравнения (1.2) с начальным условием $\tau = 0$, $R = 0$ запишем в виде

$$R = A\exp\left[-\frac{\gamma-1}{2\nu_T}\omega_{ir}^{*2}\left(1 - \frac{(2-\gamma)}{\nu_T^2}\omega_{ir}^{*2}\right)\tau\right]\sin\left[\omega_{ir}^* + \frac{(5-\gamma)(\gamma-1)}{8\nu_T^2}\omega_{ir}^{*3}\right]\tau$$

Видно, что в исследуемом режиме колебаний учет теплообмена приводит к увеличению собственной частоты. Часто [1,5–8] затухающие колебания за счет теплообмена характеризуют декрементом затухания Λ_T, который в рассматриваемом режиме определяется формулой

$$\Lambda_{iT} = \frac{8\pi(\gamma-1)[9\gamma^2 \mathrm{Nu}^2 - (2-\gamma)\mathrm{Pe}^2]\mathrm{Pe}}{[216\gamma^3\mathrm{Nu}^2 + 3\gamma(\gamma-1)(5-\gamma)\mathrm{Pe}^2]\mathrm{Nu}}$$

$$\mathrm{Pe} = 2\omega_{ir} t_T \tag{2.1}$$

Если термодинамическое поведение газа в пузырьке является изотермическим, то теплообмен практически отсутствует ($\mathrm{Pe} \to 0$) и поэтому $\Lambda_{iT} = 0$. Подчеркнем, что в представленной формуле определения числа Пекле входит не частота реализующихся колебаний, а резонансная частота, означающая, что число Pe характеризуется через параметры состояния газожидкостной смеси. Вспоминая определения времени тепловой релаксации t_T (времени выравнивания температуры неравномерно нагретого газового пузырька) и периода пульсации пузырька t_*, имеем формулу

$$\frac{t_T}{t_*} = \frac{\mathrm{Pe}}{4\pi} \tag{2.2}$$

В формулах (2.1), (2.2) необходимо задавать связь между числами Pe и Nu. Для этого воспользуемся результатом работы [5], в которой на основе точной постановки линейной задачи о теплообмене газового пузырька при малых радиальных пульсациях получена формула

$$\mathrm{Nu} = \frac{2\omega^* \mathrm{Kh}(\omega^*)}{\omega^* - 3\mathrm{Kh}(\omega^*)}, \ \mathrm{Kh}(\omega^*) = \sqrt{\omega^*}\mathrm{cth}\sqrt{\omega^*} - 1 \tag{2.3}$$

Полагая $\omega^* = \omega^*_{ir}$ и используя разложение

$$\mathrm{cth} z = \frac{1}{z} + \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \frac{2z^5}{945} - \cdots + \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1} + \cdots, \ z < \pi$$

где B_{2n}—числа Бернулли, равные $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$, $B_{12} = -691/273$, ограничимся первыми семью слагаемыми. При ω^*_{ir} =Pe/2< π^2 в табл.1 приведены результаты расчетов значения Nu для конкретных двух видов газожидкостной смеси. Видно, что при увеличении радиуса пузырька, приводящего к увеличению его поверхности, происходит улучшение теплообмена, характеризуемого безразмерным параметром Pe. При этом квазиизотермический режим колебаний реализуется

Таблица 1

R_0 (м)	водо-воздушная		водо-гелиевая	
	ω^*_{ir}	Nu	ω^*_{ir}	Nu
$3 \cdot 10^{-7}$	0,247	10	0,03	10
$5 \cdot 10^{-7}$	0,412	10,12	0,051	10
$7 \cdot 10^{-7}$	0,547	10,16	0,071	10
$1 \cdot 10^{-6}$	0,824	10,23	0,1	10
$3 \cdot 10^{-6}$	2,47	10,67	0,3	10
$5 \cdot 10^{-6}$	4,12	10.86	0,51	10,07
$7 \cdot 10^{-6}$	5,75	10,89	0,71	10,2
$1 \cdot 10^{-5}$	8,24	10,6	1,01	10,28
$3 \cdot 10^{-5}$	24,7	10	3,04	10,8
$5 \cdot 10^{-5}$	41,2	10	5,06	10,89

для водо-воздушной смеси в интервале $5 \cdot 10^{-7}$м $< R_0 \leq 7 \cdot 10^{-6}$м, а для водо-гелиевой смеси — в интервале $5 \cdot 10^{-6}$м$< R_0 \leq 5 \cdot 10^{-5}$м. Действительно, согласно табл.1, из формулы (2.2) следует неравенство

$$t_T < t,$$

означающее, что время тепловой релаксации меньше характерного макроскопического времени — периода пульсации пузырька. Иными словами, тепло от пузырька в жидкость передается в течение короткого времени в сравнении с характерным макроскопическим. Такой режим близок к изотермическому и потому назовем его квазиизотермическим. При мелких пузырьках, а именно, $R_0 \leq 5 \cdot 10^{-7}$м для водо-воздушной смеси и $R_0 \leq 5 \cdot 10^{-6}$м для водо-гелиевой смеси из (2.2) имеем

$$t_T \ll t.$$

Такое неравенство характерно для изотермического процесса [6] и потому термодинамический режим поведения газа в пузырьке практически можно считать изотермическим, при этом Nu≈ 10. Если в этом предельном режиме полагать Pe$\ll 1$, то из (2.1) следует формула для декремента затухания колебаний пузырька, полученная в [8].

3. Квазиадиабатический режим ($\nu_T < 1$). Решение уравнения (1.3) будем искать в виде степенного ряда по малому параметру ν_T

$$k = k_0 + k_1\nu_T + k_2\nu_T^2 + k_3\nu_T^3 + \cdots$$

Подставив искомое решение в уравнение (1.3) и приравняв члены при одинаковых степенях ν_T, находим

$$k_0 = \pm i\omega_{ar}^*,\ k_1 = -\frac{\gamma-1}{2\gamma},\ k_2 = \mp\frac{(3+\gamma)(\gamma-1)}{8\gamma^2}\frac{1}{\omega_{ar}^*},\ k_3 = \frac{\gamma-1}{2\gamma^3}\frac{1}{\omega_{ar}^{*2}}$$

Тогда решение уравнения (1.2) с начальным условием $\tau = 0$, $R = 0$ запишется в виде

$$R = A\exp\left[-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\nu_T\left(1 - \frac{\nu_T^2}{\gamma^2}\frac{1}{\omega_{ar}^{*2}}\right)\tau\right]\sin\left[\left(\omega_{ar}^* - \frac{(3+\gamma)(\gamma-1)}{8\gamma^2}\frac{1}{\omega_{ar}^*}\nu_T^2\right)\tau\right]$$

В рассматриваемом режиме учет теплообмена приводит к уменьшению частоты собственных колебаний пузырька, при этом декремент теплового затухания Λ_{aT} выразится формулой

$$\Lambda_{aT} = \frac{24\pi(\gamma-1)(\mathrm{Pe}^2 - 9\mathrm{Nu}^2)\mathrm{Nu}}{[8\mathrm{Pe}^2 - 9(3+\gamma)(\gamma-1)\mathrm{Nu}^2]\mathrm{Pe}},\ \mathrm{Pe} = 2\omega_{ar}t_T \tag{3.1}$$

В табл.2 приведены значения ω_{ar}^* в зависимости от радиуса пузырька для вышерассмотренных газожидкостных смесей.

Для водо-воздушной смеси при $R_0 \geq 5 \cdot 10^{-5}$м и для водо-гелиевой смеси при $R_0 \geq 3 \cdot 10^{-4}$ из табл.2 видно, что $\omega_{ar}^* =$Pe$/2 \gg 1$. Зависимость Nu от числа Pe снова определим формулой (2.3), которая для рассматриваемого режима колебаний упрощается до вида

$$\mathrm{Nu} = \sqrt{\mathrm{Pe}} \tag{3.2}$$

Таблица 2

R_0 (м)	ω^*_{ar}	
	водо-воодушная	водо-гелиевая
$3 \cdot 10^{-5}$	29,3	3,94
$5 \cdot 10^{-5}$	48,8	6,54
$7 \cdot 10^{-5}$	68,3	9,16
$1 \cdot 10^{-4}$	97,5	13,09
$3 \cdot 10^{-4}$	292,6	39,26
$5 \cdot 10^{-4}$	487,7	65,44
$7 \cdot 10^{-4}$	682,8	91,62
$1 \cdot 10^{-3}$	975,4	130,6
$3 \cdot 10^{-3}$	2926	392
$5 \cdot 10^{-3}$	4877	654
$7 \cdot 10^{-3}$	6828	916

Таким образом, с увеличением поверхности пузырька происходит усиление процесса теплообмена, при этом квазиадиабатический режим затухания колебаний реализуется для водо-воздушной смеси в интервале $5 \cdot 10^{-5}$м$\leq R_0 <$ $< 3 \cdot 10^{-3}$м, а для водо-гелиевой смеси—в интервале $3 \cdot 10^{-4}$м$\leq R_0, 5 \cdot 10^{-2}$м. Действительно, из формул (3.1) и (2.2) следует $t_T > t_*$, означающее, что время тепловой релаксации больше периода колебания пузырька. Иными словами, тепло от пузырька в жидкость передается в течение большого времени в сравнении с макроскопическим. Такой режим более близок к адиабатическому и потому назовем его квазиадиабатическим.

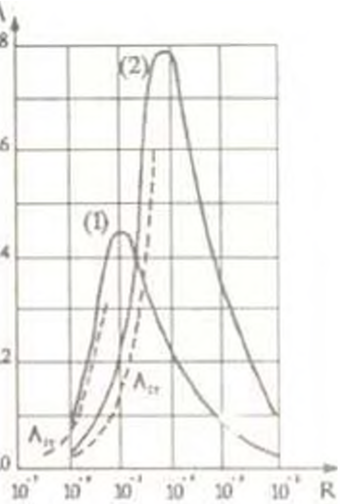
Для более крупных пузырьков вне приведенных интервалов имеет место $t_T \gg t_*$, то есть тепло передается в течение бесконечно большого времени в сравнении с макроскопическим характерным временем колебательного процесса. Такой процесс теплообмена совпадает с определением [6] адиабатического процесса и поэтому в таких пузырьках термодинамическое поведение газа можно считать адиабатическим.

Учитывая связь (3.2), при Pe$\gg 9$ величину декремента теплового затухания (3.1) можно определить упрощенной формулой

$$\Lambda_{aT} = 3\pi(\gamma - 1)\mathrm{Pe}^{-1/2}$$

которая совпадает с выражением, полученным в [5,6,8].

На фиг.1 приведены зависимости декрементов затухания от величины радиуса пузырька для водо-воздушной (1) и водо-гелиевой (2) смесей. Сплошные кривые, заимствованные из [1,5,6], соответствуют точному решению, а пунктирные кривые —формуле (2.1), по которой вычислены Λ_{iT}. Видно, что в интервале $7 \cdot 10^{-7}$м$\leq R_0 \leq 7 \cdot 10^{-6}$м для первой и второй смеси $5 \cdot 10^{-6}$м$\leq R_0 \leq$ $\leq 5 \cdot 10^{-5}$м Λ_{iT} и Λ качественно совпадают, а количественно отличаются ровно в γ раз. В этих интервалах термодинамическое поведение газа в пузырьке является квазиизотермическим. Для квазиадиабатического режима колебаний в интервалах $5 \cdot 10^{-5}$м$\leq R_0 \leq 3 \cdot 10^{-3}$м для первой и $3 \cdot 10^{-4}$м$\leq R_0 \leq 1 \cdot 10^{-2}$м для второй смесей кривые, соответствующие Λ_{aT}, вычисленным по формуле (3.1), практически не отличаются от сплошных и потому не приведены.



Фиг.1

ON FREE SMALL OSCILLATIONS OF GASE-BUBBLE IN INCOMPRESSIBLE FLUIDS

OHANIAN G.G

ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ԳԱԶԻ ՊՂՊՋԱԿԻ ԱԶԱՏ, ՓՈՔՐ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Գ.Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է անսեղմելի հեղուկում գազի պղպջակի ազատ, փոքր տատանումների վրա ջերմային էֆեկտների ազդեցության խնդիրը, որը ուսումնասիրված է գծային պարզեցված դրվածքով:

Պղպջակում, գազի թերմոդինամիկական վիճակից կախված, առանձնացված են տատանումների երկու ռեժիմ, որոնք մոտ են (բայց չեն համընկնում) իզոթերմին եւ ադիաբատին: Ստացված են ջերմափոխանակությամբ բնորոշվող մարման դեկրեմենտի մեծությունը հաշվելու պարզ բանաձեւեր: Ջուր-օդ եւ ջուր-հելիում խառնուրդների համար կատարված է ստացված եւ հայտնի արդյունքների համեմատությունը: Գտնված են պղպջակի շառավիղների չափերի այն միջակայքը, որտեղ տատանողական ռեժիմը կարելի է համարել քվազիիզոթերմ եւ քվազիադիաբատ:

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чопмен Р.Б., Плессет М.С.** Тепловые эффекты при свободном колебании газовых пузырьков.—Теор.основы инж.расчетов, 1971, т.93, но.3, с.37-40.
2. **Devin Ch.** Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsation air bubbles in water.— J.Acoust.Soc.Amer., 1959, v.31, no.12, pp.1654-1667.
3. **Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С.** Теплообмен газового пузырька с жидкостью.—МЖГ 1974, но.5, с.94-100.
4. **Ивченко В.М., Приходько Н.А., Сирый В.С.** Численное решение задачи охлаждения пузырька горячего газа в жидкости.—Гидромеханика. Респ.межвед.сб., 1971, но.19, с.9-14.
5. **Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С.** Динамика и теплообмен парогазовых пузырьков с жидкостью.— Некоторые вопросы механики сплошной среды (посвящ. 70-летию акад. Л.И. Седова). М.: Институт механики МГУ, 1978, с.229-243.
6. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч. I.—М.:Наука, 1987, 464 с.
7. **Ван-Вейнгарден Л.** Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.—Реология суспензий.—М.:Мир, 1975, с.68-103.
8. **Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С.** Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости.—МЖГ, 1988, но.6, с.80-87.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
20. IV.1990