

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ЩЕЛЬЮ

ДОВОРДЖИНИДЗЕ Л.Г.

Исследована контактная задача для бесконечной плоскости из нелинейного упругого материала гармонического типа с одной прямолинейной щелью. Заданное на бесконечности поле напряжений считается однородным. Вращение на бесконечности отсутствует. Трением и смятием на участке соприкосновения пренебрегаем и считаем ширину щели малой. С использованием комплексных представлений полей упругости элементов через две аналитические в рассматриваемой физической области функции комплексного аргумента, задача приведена к характеристическому сингулярному уравнению первого рода. Получено точное решение задачи.

Исследуется контактная задача для бесконечной плоскости из нелинейно-упругого материала гармонического типа [1] с одной прямолинейной щелью. Заданное на бесконечности поле напряжений считается однородным. Вращение там отсутствует. Трением и смятием на участке соприкосновения пренебрегаем и ширину щели считаем малой [2].

1. Пусть рассматриваемая физическая область S представляет собой плоскость переменной $z = x + iy$, разрезанную вдоль прямолинейного отрезка $L_1 = [-b; b]$ действительной оси L . На бесконечности реализуется однородное поле напряжений: $X_x^{(\infty)} = N_1$, $Y_y^{(\infty)} = N_2$, $X_y^{(\infty)} = 0$. Под действием этих нагрузок средние участки берегов щели придут в соприкосновение вдоль некоторого наперед неизвестного отрезка $L_2 = [-a; a]$ ($a < b$). Оставшуюся вне линии контакта часть L_1 обозначим через $L_3 = [-b; -a] \cup [a; b]$.

Граничные условия задачи будут иметь вид [3]

$$Y_y^+ = Y_y^-, X_x^+ = X_x^- = 0, v^+ - v^- = \delta \text{ на } L_2 \quad (1.1)$$

$$Y_y^+ = Y_y^-, X_x^+ = X_x^- = 0 \text{ на } L_3 \quad (1.2)$$

где Y_y , X_x , X_y —компоненты тензора напряжений Коши, u , v —упругие смещения, δ —ширина щели до деформации.

Для решения задачи используем комплексные представления [4]

$$X_x + Y_y + 4\mu = \frac{\lambda + 2\mu}{\sqrt{J}} q \Omega(q), Y_y - X_x - 2iX_y = -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{\sqrt{J}} \frac{\Omega(q)}{q} \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \varphi^2(z) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi'(z)}{\varphi'(z)} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial z} = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\varphi^2(z)} - \overline{\psi'(z)} \right] \quad (1.4)$$

$$u + iv = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int \varphi^2(z) dz + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] - z \quad (1.5)$$

где

$$\sqrt{J} = \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial z} - \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial z}, q = 2 \left| \frac{\partial z^*}{\partial z} \right|, \Omega(q) = q - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \quad (1.6)$$

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические в рассматриваемой области S функции комплексного аргумента $z = x + iy$, λ , μ — упругие постоянные Ламе, $z^* = z + u + iv$.

Согласно формулам (1.5) работы [4] следует, что при больших $|z|$ и условиях задачи имеют место представления

$$\varphi(z) = a_0 z + O(z^{-1}), \psi(z) = b_0 z + O(z^{-1}) \quad (1.7)$$

где a_0 и b_0 — известные постоянные

$$a_0 = \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{2\mu(N_1 + N_2) + N_1 N_2 + 4\mu^2}{\lambda(N_1 + N_2) - N_1 N_2 + 4\mu(\lambda + \mu)} \right]^{1/2}$$

$$b_0 = \frac{(\lambda + 2\mu)(N_1 - N_2)}{\lambda(N_1 + N_2) - N_1 N_2 + 4\mu(\lambda + \mu)} \quad (1.8)$$

Кроме того,

$$\varphi'(z) \neq 0 \text{ в } S + L \quad (1.9)$$

Согласно (1.1), (1.2) и условиям задачи, из (1.3), (1.4) следует на L равенство

$$\overline{\varphi(x)} \varphi''(x) - \varphi^2(x) \psi'(x) = \frac{(Y_y - X_x) |\varphi^2(x)|}{X_x + Y_y + 4\mu} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} |\varphi^2(x)| \right) \quad (1.10)$$

С использованием (1.10) из (1.3), (1.4) получим

$$X_x = Y_y + \gamma \text{ на } L \quad (1.11)$$

где

$$\gamma = \frac{4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)a_0^2 b_0}{[\mu a_0^2 + (\lambda + \mu)(1 - b_0)][\mu a_0^2 + (\lambda + \mu)(1 + b_0)]} \quad (1.12)$$

Учитывая (1.11) в (1.3), после некоторых приведений получим

$$|\varphi^2(x)| = F(x) \text{ на } L \quad (1.13)$$

где

$$F(x) = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{(Y_y + 2\mu)(Y_y + 2\mu + \gamma)}{(\lambda + 2\mu)(2Y_y + \gamma + 4\mu) - (Y_y + 2\mu + \gamma)} \quad (1.14)$$

Согласно (1.13) и (1.1), (1.2), для определения голоморфной в S функции $\varphi'(z)$ будем иметь следующие граничные условия:

$$|\varphi^2(x)|^\pm = F^\pm(x) \text{ на } L \quad (1.15)$$

где

$$F_*(x) = \begin{cases} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{(N(x) + 2\mu)(N(x) + 2\mu + \gamma)}{(\lambda + 2\mu)(2N(x) + \gamma + 4\mu) - (N(x) + 2\mu)(N(x) + 2\mu + \gamma)} = G_1(x) \text{ на } L_2 \\ \frac{2(\lambda + \mu)(2\mu + \gamma)}{\lambda\gamma + 4\mu(\lambda + \mu)} = G_2(x) \text{ на } L_3 \end{cases} \quad (1.16)$$

Через $F_*^+(x)$, $F_*^-(x)$ обозначены граничные значения функции $F_*(x)$ слева и справа в точке x линии L_1 . Мы будем считать, что эти значения удовлетворяют условию Гельдера на L_1 , а искомая функция $\varphi'(z)$ является кусочно-голоморфной в области S .

Решение класса h_0 этой задачи (решение неограниченное в точках $-b, b$), удовлетворяющее при достаточно больших $|z|$ условию (1.7), имеет вид [5]

$$\varphi'(z) = \exp \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - b^2}} \int_{-a}^a \frac{F_0(x) \sqrt{x^2 - b^2} dx}{x - z} + G(z) \right] \quad (1.17)$$

где $G(z)$ — известная функция

$$G(z) = \frac{2F_1 z}{\pi i \sqrt{z^2 - b^2}} \int_a^b \frac{\sqrt{x^2 - b^2} dx}{x^2 - z^2} + \frac{(\ln a_0^2) z}{\sqrt{z^2 - b^2}} \quad (1.18)$$

$F_0(x)$ — заданная на L_2 неизвестная, $F_1(x)$ — заданная на L_3 известная функции:

$$F_0(x) = \ln G_1(x), \quad F_1(x) = \ln G_2(x) \quad (1.19)$$

Под $\sqrt{z^2 - b^2}$ подразумевается голоморфная ветвь, изменяющаяся на разрезанной вдоль L_1 плоскости. Для отмеченной ветви

$$\sqrt{z^2 - b^2} = z + O(1) \quad (1.20)$$

при достаточно больших $|z|$.

Обратимся теперь к формуле (1.5). Продифференцируем ее по x и в полученном равенстве учтем (1.10). Тогда будем иметь на L

$$1 + u'_x + i v'_x = \left[\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{|\varphi'^2(x)|} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(1 + \frac{\mu |\varphi'^2(x)|}{\lambda + \mu} \right) \frac{\gamma}{(2Y_\nu + \gamma + 4\mu) |\varphi'^2(x)|} \right] \varphi'^2(x) \quad (1.21)$$

Согласно условиям задачи и последнего равенства (1.1) из (1.21) получим

$$\operatorname{Im} \varphi'^2(x) = \operatorname{Im} \varphi'^2(x) \text{ на } L_2 \quad (1.22)$$

Из (1.17), согласно известным соотношениям Сохоцкого-Племеля, определяем предельные значения функции $\varphi'(z)$ на L_2 и полученные выражения внесем в (1.22). Тогда после некоторых рассуждений и приведений получим

$$\int_{-a}^a \frac{F_0(x) \sqrt{b^2 - x^2} dx}{x - x_0} = -2F_1 x_0 \int_a^b \frac{\sqrt{b^2 - x^2} dx}{x^2 - x_0^2} - (\pi \ln a_0^2) x_0 = P(x_0) \quad (1.23)$$

где $F_0(x)$, $F_1(x)$ определяются формулами (1.19).

Вычислим определенный интеграл в правой части (1.23). Тогда будем иметь

$$F(x_0) = Ax_0 + Q(x_0) \quad (1.24)$$

где A —постоянная

$$A = 2F_1\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{b}\right) - \pi \ln a_0^2 \quad (1.25)$$

а

$$Q(x_0) = -2F_1 \sqrt{b^2 - x_0^2} \ln \left[\frac{\sqrt{(1 - \frac{a^2}{b^2})(b^2 - x_0^2)} + (b - \frac{ax_0}{b})}{\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - x_0^2}} - \frac{\sqrt{a + x_0}}{\sqrt{a - x_0}} \right] \quad (1.26)$$

F_1 —постоянная, определяемая согласно (1.16), (1.19).

Введем обозначение

$$F^*(x) = F_0(x) \sqrt{b^2 - x^2} \quad (1.27)$$

Тогда для определения функции $F^*(x)$ на $L_2 = [-a; a]$ получим следующее неоднородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-a}^a \frac{F^*(x) dx}{x - x_0} = Q(x_0) \quad (1.28)$$

Согласно условиям задачи мы должны искать решение класса $h(-a; a)$ (решение, ограниченное в точках $-a, a$) этого уравнения. Такое решение, как известно, имеет вид [5]

$$F^*(x_0) = \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{Q(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}(x - x_0)} \quad (1.29)$$

при выполнении условия разрешимости

$$\int_{-a}^a \frac{Q(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \quad (1.30)$$

Согласно (1.26) очевидно, что в нашем случае это условие выполняется автоматически.

Учитывая в правой части (1.29) функцию (1.26), после вычисления полученного определенного интеграла и с учетом (1.27) находим искомую функцию $F_0(x)$ в виде

$$F_0(x) = \alpha \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}} \quad (1.31)$$

где α —постоянная, определяемая формулой

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left[2 \left(\pi - \arcsin \frac{a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right) \ln \frac{2(\gamma + \mu)(\gamma + 2\mu)}{\lambda\gamma + 4\mu(\lambda + \mu)} - \pi \ln a_0^2 \right] \quad (1.32)$$

Учитывая это выражение в (1.19), на основании первого равенства (1.16) находим выражение для определения контактного давления $N(x)$ на $L_2 = [-a; a]$ в виде

$$N(x) = \frac{1}{2(1+A_0)} \left[2(\lambda + 2\mu)A_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2(1+A_0)^2}{4(\lambda + 2\mu)^2 A_0^2}} \right) - (\gamma + 4\mu)(1 + A_0) \right] \quad (1.33)$$

где

$$A_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \exp(F_0(x)) \quad (1.34)$$

Из (1.33) следует

$$\lim_{x \rightarrow \pm a} N(x) = \mu \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\mu^2}} - 1 \right) - \frac{\gamma}{2} \quad (1.35)$$

Отметим, что при одноосном однородном сжатии, т.е. когда $Y_y^{(\infty)} = N_0$, $X_x^{(\infty)} = 0$, $X_y^{(\infty)} = 0$, будем иметь: $\gamma = -N_0$.

Достаточно простой вид формула (1.33) имеет при $b_0 = 0$ ($N_1 = N_2 = N_0$). В указанном случае

$$N(x) = \frac{2\mu \left[\exp \left((\ln a_0^2) \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}} \right) - 1 \right]}{1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \exp \left[(\ln a_0^2) \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}} \right]} \quad \text{при } |x| \leq a \quad (1.36)$$

Из этой формулы очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm a} N(x) = 0$$

Вернемся теперь к формуле (1.17) и внесем в ее правой части найденное значение (1.31). Тогда после некоторых вычислений и приведений получим при $\forall z \in S$

$$\begin{aligned} \varphi'(z) = \exp \left\{ \frac{(A - a\pi)z + \pi\alpha\sqrt{z^2 - a^2}}{2\pi\sqrt{z^2 - b^2}} + \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{\sqrt{(1 - \frac{a^2}{b^2})(b^2 - z^2)} + (b - \frac{az}{b})\sqrt{a+z}}{\sqrt{(1 - \frac{a^2}{b^2})(b^2 - z^2)} + (b + \frac{az}{b})\sqrt{a-z}} \right] \right\} \quad (1.37) \end{aligned}$$

Другую искомую функцию $\psi(z)$ определяем после этого из (1.10) известным способом. Поле упругих элементов в области S можно определить из (1.3)–(1.6) операциями вычислительного характера. В частности, значения нормальных напряжений на прямой симметрии трещины можно определить по формуле

$$\begin{aligned} N(x) = \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu + \mu} \frac{|\varphi^2(x)|}{|\varphi^2(x)|} - 2\mu - \frac{\gamma}{2} + \\ + \sqrt{\frac{\mu^2(\lambda + 2\mu)^2 |\varphi^2(x)|^2}{(\lambda + \mu + \mu |\varphi^2(x)|)^2} + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (1.38) \end{aligned}$$



при $\forall x \in L$.

Из (1.38) согласно (1.37) следует, что нормальные напряжения $Y_y = N(x)$ в окрестности концов разреза $[-b; b]$ (при $|x| \geq b$) принимают конечные значения.

2. Перейдем к задаче определения параметра a , характеризующего полудлину участка контакта. Для этого используем последнее равенство условия (1.1) и представим его в виде

$$\delta = \int_a^x [v'^-(x) - v'^+(x)] dx \quad (2.1)$$

или, согласно (1.21) в виде

$$\delta = \int_a^b \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{|\varphi'^2(x)|} + \frac{\gamma(\lambda + \mu + \mu |\varphi'^2(x)|)(\text{Im}\varphi'^2-(x) - \text{Im}\varphi'^2+(x))}{(\lambda + 2\mu)(2Y_y + \gamma + 4\mu) |\varphi'^2(x)|} \right] dx \quad (2.2)$$

Подставляя сюда предельные значения функции $\varphi'(z)$, определяемые согласно (1.37) и выполняя указанные операции, получим, наконец,

$$\delta = 2 \int_a^b \left[\left(\frac{\mu F(x)}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \sin \frac{(A - \pi\alpha)x + \pi\alpha\sqrt{x^2 - a^2}}{2\pi\sqrt{b^2 - x^2}} \right] dx \quad (2.3)$$

Это равенство представляет собой трансцендентное уравнение для определения параметра a .

Аналогично исследуется задача в случае конечного числа прямолинейных разрезов.

CONTACT PROBLEM OF NON-LINEAR ELASTIC PLANE WITH A RECTANGULAR SLIT

L.G. DOBORJGINIDZE

ՈՒՂՂԱԳԻԾ ԸԵՂՁՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՉԳԱԿԱՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ
ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Լ.Գ. ԴՈՐՈՐՉԳԻՆԻԶԵ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրված է հարմոնիկ տիպի ոչ գծային առաձգական նյութից եւ մեկ ստրաճիծ ձեւը ունեցող անկերջ հարթության համար կոնտակտային խնդիր:

Անվերջությունում տրված լարումների դաշտը համարվում է համասեռ եւ պատույտը բացակայում է: Հսկան տեղամասում շփումը եւ տրորումը արհամարված են, իսկ ճեղքի լայնությունը ընդունված է փոքր: Առաձգական էլեմենտների դաշտերի կոմպլեքս ճեղքայացումների օգնությամբ խնդիրը բերված է առաջին սեռի բնութագրի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման: Ստացված է խնդրի ճշգրիտ լուծումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*.—М.:Наука, 1980. 512 с.
2. Москаловский В.И., Загубишопко П.А. Об одной смешанной задаче теории упругости в плоскости, ослабленной прямолинейной щелью.—*Докл.АН СССР*, 1954, т.94, no.3, с.409—412.
3. Мухомелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*.—М.:Наука, 1966. 707с.
4. Доборджинидзе Л.Г. Одна плоская обратная задача нелинейной теории упругости.—*Изв. АН СССР. МТТ*, 1985, no.3, с.183-185.
5. Мухомелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*.—М.:Наука, 1968. 511с.

Грузинский политехнический
институт

Поступила в редакцию
18. XII.1989