ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 6, 1990 Механика

УДК 539.3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ТЕПЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

КОЗЛОВ В. А., МАЗЬЯ В. Г., ПАРТОН В. З.

Исследуются плоские квазистатические задачи термоупругости для областей произвольной формы с разрезом. Изучается асимптотика напряжений в окрестности конца разреза. Настоящая статья примыкает к работе [1], посвященной случаю мгновенного изменения температуры на границе, где была найдена асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений в начальный момент времени.

1. Пусть Ω_0—плоская область с гладкой границей Γ_0. В Ω_0 имеется прямолинейный разрез L длины l, соединяющий начало координат $0\in\Omega_0$ с точкой $A\in\Gamma_0$. Под Γ будем понимать контур Γ_0, дополненный дважды пройденным отрезком L, а под Ω—область, ограниченную Γ.

В этом разделе ограничимся случаем идеального теплового контакта на разрезе и нулевой температуры на Γ. Температура T определяется из решения краевой задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\Delta T=f \quad \text{на} \quad \Omega_0\times(0,\infty)$$
$$T\Big|_{t=0}=\varphi,\ T=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0\times(0,\infty) \tag{1.1}$$

Вектор смещения u, порожденный температурным полем T, удовлетворяет краевой задаче (n—внешняя нормаль и τ—касательная к Γ).

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u=\gamma\operatorname{grad}T \quad \text{на} \quad \Omega$$
$$\lambda\operatorname{div}u+2\mu\partial u_n/\partial n=\gamma T \quad \text{на} \quad \Gamma$$
$$\mu(\partial u_n/\partial\tau+\partial u_\tau/\partial n)=0 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

Решение T задачи (1.1) представляется в виде

$$T(t,x)=\int_0^t\int_{\Omega_0}G(t-\tau,x,y)f(\tau,y)d\tau dy+\int_{\Omega_0}G(t,x,y)\varphi(y)dy \tag{1.2}$$

где G—температура, вызванная мгновенным точечным источником

$$f=0,\quad \varphi(x)=\delta(x-y),\quad \text{где} \quad y\in\Omega.$$

Пусть K_{I}, K_{II} и Q_{I}, Q_{II} — коэффициенты интенсивности напряже-
ний, порожденных температурными полями $T(t, x)$ и $G(t, x, y)$. В си-
лу (1.2)

$$K_j(t) = \int_0^t \int_\omega Q_j(t-\tau, y) f(\tau, y)\, d\tau\, dy + \int_\omega Q_j(t, y)\, \varphi(y)\, dy$$

$$j = \mathrm{I}, \mathrm{II}$$

Таким образом, вопрос о вычислении K_{I}, K_{II} сводится к вычислени
коэффициентов Q_{I}, Q_{II}.

Согласно [1] коэффициенты интенсивности напряжений Q_{I}, Q_{II}
выражаются формулой

$$Q_j(t, y) = \gamma \int_\omega \operatorname{grad} G(t, x, y)\, z^{(j)}(x)\, dx - \gamma \int_\Gamma G(t, x, y)\, z^{(j)}(x) \cdot n(x)\, d\Gamma$$

Здесь z^{I}, z^{II} — поля смещений, удовлетворяющие однородным урав-
нениям Ламе и краевым условиям $\sigma(z^{(j)})n = 0$ на Γ, ограниченные вн
любой окрестности точки o и имеющие асимптотику

$$(z_r^{(j)}, z_\theta^{(j)})(r, \theta) = [2(1+\varkappa)(2\pi r)^{1/2}]^{-1} \psi^{(j)}(\theta) + O(1), \quad r \to 0$$

$$\psi^{\mathrm{I}}(\theta) = ((2\varkappa+1)\cos 3\theta/2 - 3\cos\theta/2, -(2\varkappa-1)\sin 3\theta/2 + 3\sin\theta/2)$$

$$\psi^{\mathrm{II}}(\theta) = (\sin\theta/2 - (2\varkappa+1)\sin 3\theta/2, \cos\theta/2 - (2\varkappa-1)\cos 3\theta/2)$$

где $\varkappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона. Интегрируя по частям, полу-
чаем

$$Q_j(t, y) = -\gamma \int_\omega G(t, x, y) \operatorname{div} z^{(j)}(x)\, dx$$

Отсюда следует, что функции Q_{I}, Q_{II} являются ограниченными пр
любом $t > 0$ решениями краевой задачи

$$\frac{\partial Q_j}{\partial t} - \Delta Q_j = 0 \qquad \text{на} \qquad \Omega_0 \times (0, \infty)$$

$$Q_j|_{t=0} = -\gamma \operatorname{div} z^{(j)} \qquad \text{на} \qquad \Gamma_0 \times (0, \infty)$$

Обозначим через K_j решение аналогичной краевой задачи в пло
кости с разрезом, в которой роль функции $-\gamma \operatorname{div} z^{(j)}$ играет ее аси
птотика

$$k_{\mathrm{I,II}} = \frac{\gamma(1-2\nu)}{2(1-\nu)\sqrt{2\pi}}\, r^{-1/2} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \left(-\frac{3\theta}{2} \right)$$

(Функции K_{I}, K_{II} являются коэффициентами интенсивности напр
жений, вызванных тепловым источником, расположенным в плоскос
с полубесконечным разрезом вдоль отрицательной полуоси абсцисс

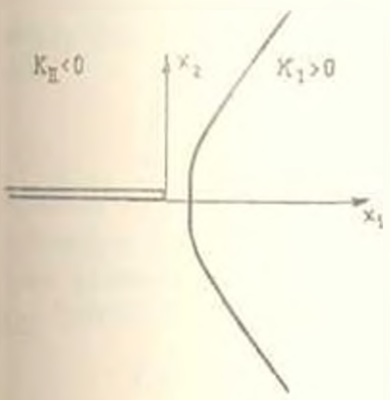
Из условий $(Q_j-K_j)|_{t=0}=O(\gamma l^{-1}|y|^{-1/2})$, $Q_j=K_j$ на $L_\pm$, можно вывести оценку [2]

$$|Q_j(t,y)-K_j(t,y)|\leqslant Cl^{-1}t^{-1/4}\left(1+\frac{|y|}{\sqrt{t}}\right)^{-1/2}$$

справедливую при $t\leqslant Cl^2$. Здесь C—безразмерная переменная, зависящая от формы Γ. Из формулы для $K_j(t,y)$, полученной в п. 2, следует, что при $t\leqslant Cl^2$ справедливо равенство

$$Q_j(t,y)=\frac{\gamma(1-2\nu)t^{-3/4}}{4\pi^{3/2}(1-\nu)}\left(K_j\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right)+O\left(l^{-1/2}t^{1/2}\left(1+\frac{|y|}{\sqrt{t}}\right)^{-1/2}\right)\right) \qquad (1.3)$$

где K_1, K_2 определены равенствами (2.3), (2.4) (см. фиг. 1 и 2).



Фиг. 1.

Фиг. 2.

2. Рассмотрим плоскую деформацию плоскости с полубесконечным разрезом $L=\{x=(x_1,x_2):x_2=0,\ x_1<0\}$, вызванную тепловым источником интенсивности 1, расположенным в точке $y=(y_1,y_2)$:

$$T(t,x,y)=(4\pi t)^{-1}\exp(-|x-y|^2/4t)$$

Напряжения в плоскости с разрезом определяются из задачи

$$\begin{aligned}&\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u=\gamma\operatorname{grad}T \quad \text{на} \quad R^2\setminus L\\&\sigma_{22}(u)=\lambda\operatorname{div}u+2\mu\partial u_2/\partial x_2=\gamma T \quad \text{на} \quad L\\&\sigma_{21}(u)=\mu(\partial u_2/\partial x_1+\partial u_1/\partial x_2)=0 \quad \text{на} \quad L\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Будем искать решение u в виде $u=U+V$, где U—решение задачи

$$\mu\Delta U+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}U=\gamma\operatorname{grad}T \quad \text{на} \quad R^2.$$

Тогда $U=\operatorname{grad}\Phi$ на R^2, где Φ удовлетворяет уравнению $(\lambda+2\mu)\Delta\Phi=-\gamma T$. Несложный подсчет дает

$$\Phi(t,x,y)=\frac{\gamma}{4\pi(\lambda+2\mu)}\int_0^{|x-y|^2/4t}P(S)dS,\quad P(S)=(1-e^{-S})/S$$

Функция V является решением краевой задачи

$$\mu \Delta V + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\, V = 0 \quad \text{на} \quad R^2 \setminus L$$

$$\sigma_{22}(V) = \gamma T - \sigma_{22}(U) \quad \text{на} \quad L$$

$$\sigma_{21}(V) = -\sigma_{21}(U) \quad \text{на} \quad L$$

Так как функция U — гладкая в окрестности точки 0, то коэффициенты интенсивности напряжений, порожденные смещениями U и V, совпадают. Как известно, коэффициенты интенсивности даются формулами

$$K_I(t, y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \sigma_{22}(V)|x_1|^{-1/2} dx_1$$

$$K_{II}(t, y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \sigma_{21}(V)|x_1|^{-1/2} dx_1$$

Поскольку

$$\sigma_{22}(U) = (\lambda + 2\mu)\Delta\Phi - 2\mu \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \; \sigma_{21}(U) = 2\mu \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

то справедливы равенства

$$\sigma_{22}(V) = 2\mu \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{21}(V) = -2\mu \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{на} \quad L \tag{2.2}$$

Так как

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)t}\left(P\left(\frac{|x-y|^2}{4t}\right) + \frac{(x_1 - y_1)^2}{2t} P'\left(\frac{|x-y|^2}{4t}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\gamma(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}{16\pi(\lambda + 2\mu)t^2} P'\left(\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$$

то

$$K_j(t, y) = \frac{\gamma(1-2\nu)t^{-3/4}}{4\pi^{3/2}(1-\nu)} K_j\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right)$$

где

$$K_I(y) = -\frac{\partial}{\partial y_1} \int_{0}^{\infty} (y_1 + x) P((y_1 + x)^2 + y_2^2) \frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{2.3}$$

$$K_{II}(y) = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{0}^{\infty} P((y_1 + x)^2 + y_2^2) \frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{2.4}$$

Области знакопостоянства функций K_I, K_{II} приведены на фиг. 1, 2.
Найдем асимптотику функций $K_j(y)$ при $|y| \to \infty$.

Пусть

$$g(z)=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{(x+z)^2}\frac{dx}{\sqrt{x}},\quad z=y_1+iy_2$$

Тогда $g(z)=\frac{\pi}{2}z^{-3/2}$. С другой стороны вне множества $\{(y_1, y_2): y_1<0,\ |y_2|\ll|y_1|\}$ справедлива асимптотика

$$K_{\rm I}(y)\sim\operatorname{Re}g(z)=\frac{\pi}{2}|y|^{-3/2}\cos\frac{3}{2}\theta \tag{2.5}$$

$$K_{\rm II}(y)\sim\operatorname{Im}g(z)=-\frac{\pi}{2}|y|^{-3/2}\sin\frac{3}{2}\theta \tag{2.6}$$

Рассмотрим случай $y_1<0,\ |y_2|\ll|y_1|,\ |y_1|\to\infty$. Будем искать асимптотику функций K_j и, следовательно K_j непосредственно из уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)K_j(t,y)=0,\quad K_j|_{t=0}=h_j$$

Функция $h_{\rm II}$ имеет скачок на луче $y_1<0,\ y_2=0$. Снимем этот скачок слагаемым $|y_1|^{-3/2}F(y_2/2\sqrt{t})$, где F — нечетная функция. Для F получаем уравнение $F''+2yF'=0$, поэтому $F(y)=C\operatorname{erf}y$

Константа C находится из условия

$$K_{\rm II}(t,y)^{t=0}\sim\frac{\gamma(1-2\nu)|y_1|^{-3/2}}{2(1-\nu)\sqrt{2\pi}}\quad\text{при}\quad|y_2|\ll|y_1|,\ y_1<0,\ y_2>0.$$

Откуда $C=\gamma(-2\nu)(1-\nu)^{-1}2^{-1}(2\pi)^{-1/2}$. Производные функции h_1 терпят скачок на луче L. Снимем его с помощью функции $t^{1/2}|y_1|^{-5/2}F(y_2/2\sqrt{t})$. Функция F_1 удовлетворяет уравнению $F_1''+2yF_1'-2F_1=0$. Поэтому

$$F_1(y)=C_1(y\operatorname{erf}y+\pi^{-1/2}e^{-y^2})$$

Константа C_1 находится из условия

$$K_{\rm I}(t,y)^{t=0}\sim-\frac{\gamma(1-2\nu)|y_1|^{-5/2}}{2(1-\nu)\sqrt{2\pi}}\frac{3}{2}|y_2|,\ |y_2|\ll|y_1|,\ y_1<0,$$

откуда $C_1=-3\gamma(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}2^{-1}(2\pi)^{-1/2}$. Следовательно, при $|y_2|\ll|y_1|,\ y_1<0$ справедливы соотношения

$$K_{\rm I}(y)\sim-\frac{3\pi}{4}|y_1|^{-5/2}(y_2\operatorname{erf}y_2+\pi^{-1/2}e^{-y_2^2}) \tag{2.7}$$

$$K_{\rm II}(y)\sim\frac{\pi}{2}|y_1|^{-3/2}\operatorname{erf}y_2 \tag{2.8}$$

3. Рассмотрим случай нулевой температуры на берегах полубесконечного разреза.

Коэффициенты интенсивности $K^0_{\rm I}$, $K^0_{\rm II}$ являются решениями задачи

$$\frac{\partial K_j^0}{\partial t} - \Delta K_j^0 = 0 \qquad \text{на} \quad (0, \infty)\times(R^2 \setminus L)$$

$$K_j^0|_{t=0} = h_j, \; K_j^0 = 0 \quad \text{при} \quad t > 0 \quad \text{на} \quad L_\pm$$

Поскольку функция K_{II}, построенная в п. 2, удовлетворяет уравнению теплопроводности, равна h_{II} при $t=0$ и нечетна, то будем искать $K_I^0(t, y)$ в виде

$$K_I^0(t, y) = \frac{\gamma(1-2\nu)t^{-3/4}}{2(1-\nu)\sqrt{2\pi}} f\left(\frac{r^2}{4t}\right)\cos\frac{3\vartheta}{2}$$

Тогда для функции $f(\rho)$ получаем уравнение $\rho f'' + (\rho+1)f' + \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{16\rho}\right)f = 0$,

откуда несложно получить формулу $f(\rho) = \frac{\rho^{-3/4}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^1 e^{-\rho s} S^{1/2} ds$

4. Рассмотрим теплоизолированный разрез. Коэффициенты интенсивности K_I^1, K_{II}^1 являются решениями задачи

$$\frac{\partial K_j^1}{\partial t} - \Delta K_j^1 = 0 \qquad \text{на} \quad (0, \infty)\times(R^2 \setminus L)$$

$$K_j^1|_{t=0} = h_j, \; \partial K_j^1/\partial y_2 = 0 \quad \text{при} \quad t > 0 \quad \text{на} \quad L_\pm$$

Поскольку $K_I(t, y)$ — четная функция, то $K_I^1(t, y) = K_I(t, y)$. Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, использованные в п. 3 при отыскании коэффициента K_I^0, находим

$$K_{II}^1(t, y) = \frac{\gamma(1-2\nu)t^{-3/4}}{2(1-\nu)\sqrt{2\pi}} f(r^2/4t)\sin(-3\vartheta/2)$$

Отметим, что можно доказать неравенство

$$K_I^0(t, y) \leqslant K_I(t, y) \quad \text{при} \quad t > 0,\; y \in R^2 \tag{4.1}$$

5. Рассмотрим плоскость, ослабленную разрезом $L = \{(x_1, x_2) \in R^2:\ x_2 = 0,\ -a < x_1 < a\}$. Найдем коэффициенты интенсивности напряжений для правого конца разреза, порожденных мгновенным тепловым источником единичной интенсивности, расположенным в точке $y = (y_1, y_2)$ (разрез предполагается идеально проводящим). Используя формулы Л. И. Седова для коэффициентов интенсивности [3] и выражения для нормальных и касательных напряжений, полученных в п. 1, находим

$$K_j(t, y) = \frac{\gamma(1-2\nu)a^{1/2}}{8\pi^{3/2}(1-\nu)t} \chi_j\left(\frac{y}{a}, \frac{4t}{a^2}\right), \quad j = \mathrm{I}, \mathrm{II}$$

где

$$\chi_I(y, \tau) = \frac{\partial}{\partial y_1} \int\limits_{-1}^{1} (y_1 - S) P\left(\frac{(y_1-S)^2 + y_2^2}{\tau}\right) \sqrt{\frac{1+S}{1-S}}\, dS$$

$$\chi_{II}(y, \tau) = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-1}^{1} P\left(\frac{(y_1-\rho')^2 + y_2^2}{\tau} \right) \sqrt{\frac{1+S}{1-S}}\, dS$$

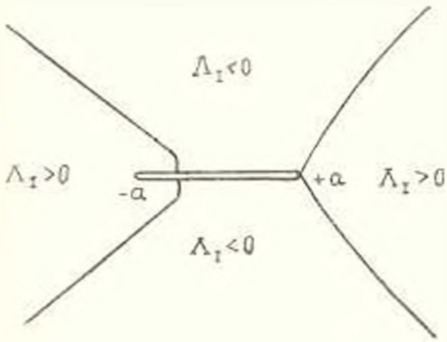
Если $\tau^{1/2} \ll \mathrm{dist}(y(-1, 1))$, то полагая $z = y_1 + iy_2$, получаем асимптотику

$$\chi_I + i\chi_{II} \sim \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^{1} \frac{\tau}{S-z} \sqrt{\frac{1+S}{1-S}}\, dS = \frac{\pi\tau}{(z-1)\sqrt{z^2-1}}$$

Следовательно, при $t^{1/2} \ll \mathrm{dist}(y, L)$ справедлива асимптотическая формула

$$\Lambda_I + i\Lambda_{II} \sim \frac{\gamma(1-2\nu)a^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\,(1-\nu)} r_{+}^{-3/2} r_{-}^{-1/2} \exp(-i(3\varphi_{+} + \varphi_{-})/2)$$

где $r_{\pm} \exp(i\varphi_{\pm}) = y \mp a$, $-\pi < \varphi_{\pm} \leqslant \pi$. Распределение знаков функции $\Lambda_I(0, y)$ изображено на фиг. 3. Множество $\{y \in R^2 : \Lambda_I(0, 7) = 0\}$ представляет собой две кривые



Фиг. 3.

$$r_{+} = -2a \frac{\sin 3\varphi_{+}}{\sin 4\varphi_{+}}, \quad \pm\varphi_{+} \in (\pi/4, \pi/3)$$

$$r_{-} = 2a \frac{\sin\varphi_{-}13}{\sin 4\varphi_{-}13}, \quad \varphi_{-} \in (-3\pi/4, 3\pi/4)$$

Приведенный график показывает, например, что источник, близкий к одному из концов, создавая вблизи него сжимающие напряжения, может вызвать в окрестности другого конца «опасные» растягивающие напряжения.

COEFFICIENTS OF INTENSITY OF STRESSES EXCITING BY THERMAL SONRCES

V. A. KOZLOV, V, G. MAZIA, V. Z. PARTON

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐԻՑ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԸ

Վ. Ա. ԿՈԶԼՈՎ, Վ. Գ. ՄԱԶՅԱ, Վ. Զ. ՊԱՐՏՈՆ

Հետազոտված են կտրվածք ունեցող կամայական ձևի տիրույթների համար ջերմաառաձգականության հարթ քվազիստատիկ խնդիրներ։ Ուսումնասիրված է կտրվածքի եզրի շրջակայքում լարումների ասիմպտոտիկան։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З.* Асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений в квазистатических температурных задачах для области с разрезом.—Прикл. мат. и мех. 1985, № 1, с. 117—125.
2. *Козлов В. А., Мазья В. Г.* Об особенностях решений первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с коническими точками 1.—Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1987, № 2, с. 38—47.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.—М.: Наука, 1976, т. II, 584 с.

Московский институт химического
машиностроения

Поступила в редакцию
29.IV.1988