ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, №6, 1990 Механика

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

БАРСЕГЯН Г. Н., КИРАКОСЯН Р. М.

Рассматривается задача проектирования однослойной прямоугольной пластинки минимального объема, изготовленной из упругого ортотропного материала.

Следуя [1], показывается, что если на поверхностях пластинки упругий потенциал принимает постоянное значение, то объем такой пластинки является минимальным в классе пластинок близкой конфигурации при соответствующем ограничении на прочность. Получена разрешающая система уравнений задачи. Разработан алгоритм и составлена программа численной реализации решения на ЭВМ. Проведено сравнение минимального объема с объемом соответствующей пластинки постоянной толщины при различных отношениях сторон.

1. Прямоугольная однослойная пластинка, размерами $2a$ и $2b$ в плане, несет распределенную поперечную нагрузку интенсивности $q(x, y)$. Координатная плоскость xy совмещена со срединной плоскостью недеформированной пластинки. Предполагается, что имеют место основные допущения классической теории изгиба тонких пластинок. Считается, что материал пластинки является ортотропным и подчиняется обобщенному закону Гука [2].

Напряженное состояние пластинки можно представить моментами M_x, M_y, M_{xy}, которые удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-q \tag{1.1}$$

и связаны с кривизнами срединной поверхности

$$\varkappa_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varkappa_{xy}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1.2}$$

следующими соотношениями:

$$M_x=\frac{h^3}{12}(B_{11}\varkappa_x+B_{12}\varkappa_y), \quad M_y=\frac{h^3}{12}(B_{12}\varkappa_x+B_{22}\varkappa_y) \tag{1.3}$$

$$M_{xy}=\frac{h^3}{12}B_{66}\varkappa_{xy}$$

Здесь w — прогиб, h — толщина.

$$B_{11}=\frac{a_{22}}{\Omega_0},\quad B_{22}=\frac{a_{11}}{\Omega_0},\quad B_{12}=-\frac{a_{12}}{\Omega_0}$$

$$B_{66}=\frac{1}{a_{66}},\quad \Omega_0=a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \tag{1.4}$$

a_{ij} — упругие постоянные материала.

Компоненты деформации определяются формулами

$$\varepsilon_x=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varepsilon_y=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \varepsilon_{xy}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1.5}$$

где z — поперечная координата.

С учетом (1.2) и (1.5) выражения моментов (1.3) можно представить в виде

$$M_x=\frac{h^2}{6}(B_{11}\varepsilon_x^0+B_{12}\varepsilon_y^0),\quad M_y=\frac{h^2}{6}(B_{12}\varepsilon_x^0+B_{22}\varepsilon_y^0) \tag{1.6}$$

$$M_{xy}=\frac{h^2}{6}B_{66}\varepsilon_{xy}^0$$

Здесь через ε_x^0, ε_y^0, ε_{xy}^0 обозначены значения компонент деформации на поверхности пластинки $z=h/2$.

Разрешая систему (1.6) относительно ε_x^0, ε_y^0, ε_{xy}^0 и имея в виду соотношения (1.4), получим

$$\varepsilon_x^0=\frac{6}{h^2}(a_{11}M_x+a_{12}M_y),\qquad \varepsilon_y^0=\frac{6}{h^2}(a_{12}M_x+a_{22}M_y) \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_{xy}^0=\frac{6}{h^2}a_{66}M_{xy}$$

Для упругого потенциала, отнесенного к единице объема пластинки, имеем [2]

$$U=\frac{1}{2}(a_{11}\sigma_x^2+a_{22}\sigma_y^2+2a_{12}\sigma_x\sigma_y+a_{66}\sigma_{xy}^2) \tag{1.8}$$

С учетом (1.4) и закона Гука, выражение (1.8) можно представить в виде

$$U=\frac{1}{2}(B_{11}\varepsilon_x^2+B_{22}\varepsilon_y^2+B_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y+B_{66}\varepsilon_{xy}^2) \tag{1.9}$$

Условие постоянства упругого потенциала (1.9) на поверхностях пластинки $z=\pm h/2$ имеет вид

$$U\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}}=\frac{1}{2}[B_{11}(\varepsilon_x^0)^2+B_{22}(\varepsilon_y^0)^2+2B_{12}\varepsilon_x^0\varepsilon_y^0+B_{66}(\varepsilon_{xy}^0)^2]=\frac{C}{8}=\mathrm{const} \tag{1.10}$$

Подставляя (1.7) в (1.10), получаем

$$U\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}}=\frac{18}{h^4}(a_{11}M_x^2+a_{22}M_y^2+2a_{12}M_xM_y+a_{66}M_{xy}^2)=\frac{C}{8}=\mathrm{const} \tag{1.11}$$

Покажем, что это условие обеспечивает минимальный объем в классе пластинок близкой конфигурации.

Для пластических пластинок известно [1], что если в предельном состоянии существует поле кинематически возможных деформаций, совместимое с этим состоянием, то условие

$$\frac{\partial D}{\partial h}=\frac{\partial}{\partial h}(M_x\varkappa_x+M_y\varkappa_y+M_{xy}\varkappa_{xy})=\mathrm{const} \tag{1.12}$$

обеспечивает минимальность объема в классе однослойных безреберных пластинок близкой конфигурации. Здесь D — диссипация энергии деформирования, приходящейся на единицу площади срединной плоскости пластинки. Как обычно, поле деформацией называется совместным с предельным состоянием, если вектор обобщенных деформаций $\varkappa_x$, $\varkappa_y$, $\varkappa_{xy}$ в каждой точке направлен по нормали к поверхности предельного состояния.

Этот результат можно распространить и на случай упругих анизотропных пластинок путем введения формальных аналогов предельной поверхности и ассоциированного закона деформирования. При этом диссипацию энергии D следует заменить соответствующей работой внутренних моментов на изменения кривизн пластинки. Следуя [1, 3], предельным будем называть состояние пластинки, когда упругий потенциал (1.8) принимает заданное постоянное значение на поверхностях пластинки.

Имея в виду (1.11), уравнение предельной поверхности пластинки представим в виде:

$$2\varphi(M_{ij})=a_{11}M_x^2+a_{22}M_y^2+2a_{12}M_xM_y+a_{66}M_{xy}^2-\frac{Ch^4}{144}=0 \tag{1.13}$$

Используя выражения (1.3), с учетом (1.13) получим

$$\begin{aligned}
\varkappa_x&=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial M_x}=\frac{12}{h^3}(a_{11}M_x+a_{12}M_y)\\
\varkappa_y&=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial M_y}=\frac{12}{h^3}(a_{12}M_x+a_{22}M_y)\\
\varkappa_{xy}&=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial M_{xy}}=\frac{12}{h^3}a_{66}M_{xy}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где $\lambda=\frac{h^3}{12}$.

Таким образом, вектор с компонентами, пропорциональными $\varkappa_{ij}$, направлен по внешней нормали к предельной поверхности $\varphi(M_{ij})$ и, следовательно, поле деформаций совместимо с предельным состоянием. В силу этого для минимальности объема остается выполнение лишь условия (1.12).

Покажем, что при (1.11) это условие всегда выполняется. С учетом (1.11) и (1.14) условие (1.12) приводится к виду

$$\frac{\partial D}{\partial h}=\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{2h}{3}U\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}}\right)=\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{hC}{12}\right)=\frac{C}{12}=\text{const} \tag{1.15}$$

Таким образом, условие (1.12) для равнопрочной пластинки выполняется. Это означает, что равнопрочная пластинка обладает минимальным объемом среди однослойных безреберных пластинок близкой конфигурации.

Подставляя выражения моментов (1.3) и условие равнопрочности (1.13) и в уравнение равновесия (1.1), с учетом (1.2) и (1.4), получим следующую разрешающую систему уравнений относительно искомых h и w:

$$
\begin{gathered}
B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+B_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4B_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2=Ct^{-\frac{2}{3}}\\
t\left[B_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+B_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]+2\frac{\partial t}{\partial x}\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\right.\\
\left.+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+2\frac{\partial t}{\partial y}\left[(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right]+\\
+\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\left(B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\\
+4B_{66}\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=12q
\end{gathered}
\tag{1.16}
$$

где $t=h^3$.

Таким образом, решение задачи проектирования однослойной ортотропной упругой прямоугольной пластинки минимального объема сводится к решению системы (1.16) при соответствующих граничных условиях.

2. Пользуясь безразмерными обозначениями

$$
\begin{gathered}
\xi=\frac{x}{a},\quad \eta=\frac{y}{an},\quad n=\frac{b}{a},\quad P_{ij}=\frac{B_{ij}}{E}\\
\omega=\frac{8}{\sqrt{3}}\frac{w}{a}\left(\frac{Ea^3}{C^3}\right)^{\frac{1}{4}},\quad \mu=\frac{t}{24\sqrt{3}a^3}\left(\frac{EC}{q^3}\right)^{\frac{3}{4}}
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

систему (1.16) можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
P_{11}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\right)^2+\frac{P_{22}}{n^4}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\right)^2+\frac{2P_{12}}{n^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\frac{4P_{66}}{n^2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2=\frac{16}{9}\mu^{-\frac{2}{3}}\\
\mu\left[P_{11}\frac{\partial^4\omega}{\partial\xi^4}+\frac{2(P_{12}+2P_{66})}{n^2}\frac{\partial^4\omega}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\frac{P_{22}}{n^4}\frac{\partial^4\omega}{\partial\eta^4}\right]+\\
+2\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\left(P_{11}\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^3}+\frac{P_{12}+2P_{66}}{n^2}\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi\partial\eta^2}\right)+2\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\left(\frac{P_{12}+2P_{66}}{n^2}\frac{\partial^3\omega}{\partial\xi^2\partial\eta}+\right.
\end{gathered}
$$

$$+\frac{P_{12}}{n^4}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\Bigg)+\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\left(P_{11}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{P_{12}}{n^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\right)+\frac{\partial^2\eta}{\partial\eta^2}\left(\frac{P_{12}}{n^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{P_{22}}{n^4}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}\right)+$$

$$+\frac{4P_{66}}{n^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{4}{3} \qquad (2.2)$$

Здесь E — постоянная, имеющая размерность напряжения.

Систему (2.2) можно решить во той же схеме, что и систему задачи проектирования однослойной прямоугольной идеально-пластической пластинки минимального объема [4], поскольку эти системы отличаются друг от друга лишь значениями постоянных коэффициентов. В случае изотропного упругого несжимаемого материала система (2.2) полностью совпадает с соответствующей системой задачи проектирования однослойной изотропной идеально-пластической пластинки минимального объема.

Численное решение основывается на конечно-разностном представлении системы уравнений (2.1) и соответствующих граничных условий. Оно выполняется путем дискретного представления приближений искомых функций ω и η на прямоугольной сетке со сторонами, параллельными координатным осям. Полученная система конечно-разностных уравнений решается методом итераций.

В качестве примера рассмотрим задачу проектирования шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q_0. Срединная плоскость пластинки разбита на 196 равных прямоугольных частей. Для постоянных материала приняты следующие значения

$$\frac{B_{11}}{E}=1{,}5;\quad \frac{B_{12}}{E}=0{,}6;\quad \frac{B_{22}}{E}=0{,}75;\quad \frac{B_{66}'}{E}=0{,}2 \qquad (2.3)$$

В случае бесконечно длинной полосы, когда имеет место цилиндрический изгиб, решение задачи получается в виде

$$h_{пол}=\sqrt{\frac{6q_0}{\sqrt{B_{11}C}}}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (2.4)$$

С учетом (2.4) для объема единичной длины полосы имеем

$$V_{пол}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6q_0}{\sqrt{B_{11}C}}}\,a^2 \qquad (2.5)$$

Для безразмерного значения объема единичной длины полосы, с учетом (2.3) и (2.5), получается

$$\overline{V}_{пол}=\frac{V_{пол}}{a^2}\left(\frac{EC}{q_0^2}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{2}\sqrt[4]{24}\approx 3{,}477 \qquad (2.6)$$

С целью сравнения результатов рассмотрена также пластинка постоянной толщины при тех же граничных условиях.

Имея в виду известное решение задачи поперечного изгиба [5], при одинаковом условии прочности, для пластинки постоянной толщины получается

$$\bar{h}_{1\,\text{пост.}} = \frac{h_{\text{пост.}}}{a}\left(\frac{EC}{q_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{16\sqrt{3}\,n}{\pi^4}\Bigg| P_{11}n^4 \times$$

$$\times\left(\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\ \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{m}{k}\,\frac{\sin\frac{\pi m\xi}{2}\sin\frac{\pi k\eta}{2}}{P_{11}(mn)^4+2(P_{12}+2P_{66})(mkn)^2+P_{22}n^4}\right)^2+$$

$$+P_{22}\left(\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\ \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{k}{m}\,\frac{\sin\frac{\pi m\xi}{2}\sin\frac{\pi k\eta}{2}}{P_{11}(mn)^4+2(P_{12}+2P_{66})(mkn)^2+P_{22}n^4}\right)^2+$$

$$+2P_{12}n^2\left(\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\ \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{m}{k}\,\frac{\sin\frac{\pi m\xi}{2}\sin\frac{\pi k\eta}{2}}{P_{11}(mn)^4+2(P_{12}+2P_{66})(mkn)^2+P_{22}n^4}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\ \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{k}{m}\,\frac{\sin\frac{\pi m\xi}{2}\sin\frac{\pi k\eta}{2}}{P_{11}(mn)^4+2(P_{12}+2P_{66})(mkn)^2+P_{22}n^4}\right)+$$

$$+4P_{66}n^2\left(\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\ \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi m\xi}{2}\cos\frac{\pi k\eta}{2}}{P_{11}(mn)^4+2(P_{12}+2P_{66})(mkn)^2+P_{22}n^4}\right)^2\Bigg|^{\frac{1}{2}} \qquad (2.7)$$

Безразмерное значение объема единичной длины пластинки постоянной толщины определяется по формуле

$$\bar{V}_{\text{пост.}} = \frac{V_{\text{пост.}}}{2a^2b}\left(\frac{EC}{q_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\bar{h}_{\text{пост.}} \qquad (2.8)$$

Аналогичным образом для полосы постоянной толщины имеем

$$\bar{h}_{\substack{\text{пол.}\\ \text{пост.}}} = \frac{h_{\substack{\text{пол.}\\ \text{пост.}}}}{a}\left(\frac{EC}{q_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{16}}{\sqrt{\pi\sqrt{P_{11}}}}\sqrt{\left|\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{\pi m\xi}{2}\right|} \qquad (2.9)$$

Безразмерное значение объема единичной длины полосы постоянной толщины на основе (2.9) имеет вид

$$\bar{V}_{\substack{\text{пол.}\\ \text{пост.}}} = \frac{V_{\substack{\text{пол.}\\ \text{пост.}}}}{a^2}\left(\frac{EC}{q_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\bar{h}_{\substack{\text{пол.}\\ \text{пост.}}} \qquad (2.10)$$

В табл. 1 представлены безразмерные значения объема единичной длины пластинки постоянной толщины (2.9) при различных отношениях сторон пластинки и чисел удержанных слагаемых в двойных рядах (2.7).

Как видно из табл. 1, сходимость безразмерных значений объема можно считать практически достигнутой при числе слагаемых 961.

В табл. 2 представлены безразмерные значения объема единичной длины равнопрочной пластинки (2.8) при различных отношениях сторон. Там же приведены соответствующие значения для пластинки и полосы постоянной толщины. В последней строке

Таблица 1

b/a / Число слагаемых	1	2	5	10	50	100
900	3.568	4.331	4.450	4.434	4.435	4.448
961	3.568	4.331	4.450	4.434	4.437	4.455
1024	3.568	4.331	4.450	4.434	4.437	4.455

Таблица 2

$\frac{b}{a}$	1	2	5	10	50	100	∞
$\overline{V}$	2.510	3.008	3.274	3.346	3.386	3.388	3.477
$V_{\text{пост.}}$	3.568	4.331	4.451	4.434	4.437	4.455	4.428
$\frac{\overline{V}_{\text{пост.}} - \overline{V}}{\overline{V}}$	42.[illegible]%	44%	35.9%	32.5%	31%	31.5%	27.4%

Таблица 3

η / ξ	0	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	1
0	2.038	2.020	1.964	1.865	1.714	1.484	1.117	0
1/7	2.010	1.993	1.936	1.838	1.689	1.463	1.102	0
2/7	1.935	1.917	1.862	1.765	1.620	1.403	1.059	0
3/7	1.826	1.809	1.753	1.658	1.517	1.311	0.991	0
4/7	1.681	1.664	1.608	1.514	1.376	1.181	0.891	0
5/7	1.474	1.457	1.404	1.314	1.179	0.995	0.746	0
6/7	1.127	1.114	1.072	1.000	0.892	0.744	0.556	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0

табл. 2 представлен размер выигрыша в объеме оптимальной пластинки по сравнению с пластинкой постоянной толщины.

В табл. 3 приведены безразмерные значения толщины $\overline{h} = \frac{h}{a}\left(\frac{EC}{q_0^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ в узлах одной четверти разностной сетки квадратной пластинки.

DESIGN OF ANISOTROPIC ELASTIC PLATES OF MINIMUM VOLUME

G. N. BARSEGIAN, R. M. KIRAKOSIAN

ՄԻՆԻՄԱԼ ԾԱՎԱԼԻ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԱՌԱՁԳԱՊԼԱՍՏԻԿ ՍԱԼԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Գ. Ն. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է առաձգական օրթոտրոպ նյութից պատրաստված մինիմալ ծավալի միաշերտ ուղղանկյուն սալի նախագծման խնդիրը։ Ցույց է տրված, որ եթե սալի մակերևույթների վրա առաձգական պոտենցիալը ստանում է հաստատուն արժեք, ապա այդպիսի սալի ծավալը հանդիսանում է մինիմալ՝ իրարից քիչ տարբերվող սալերի դասում։ Դիտարկված է կոնկրետ թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шилд Р.* Методы оптимального проектирования конструкций.—Сб. пер. Механика, 1962, №2(72), с. 148—159.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин.—М.: Наука, 1967. 268 с.
3. *Киракосян Р. М.* О достаточных условиях наименьшего объема идеально-пластических пластинок.—Докл. АН Арм. ССР, 1981, т. 72, №5, с. 291—295.
4. *Барсегян Г. Н.* О задаче проектирования идеально-пластических прямоугольных пластинок.—В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1989, с. 128—133.
5. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки.—М.-Л.: ОГИЗ—Гостехиздат, 1947. 355 с.

Институт механики
АН Армении

Поступила в редакцию
13.XII.1989