

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА И МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗНОСТЕЙ ПРИМЕНительно К СВОБОДНО ОПЕРТЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ ПЛИТАМ

ГЕВОРКЯН Г. С.

В работе [1] предложен метод, где применяется принцип Сен-Венана к статическим условиям на поверхности упругого тела и тем самым получено приближенное решение задачи теории упругости.

В настоящей работе получено общее решение задачи об изгибе опертой прямоугольной плиты под действием равномерно распределенной нагрузки при любом разбиении контура с применением принципа Сен-Венана.

Принимается, что прогиб $W(x, y)$ плиты точно удовлетворяет дифференциальному уравнению упругой плиты

$$\nabla^4 W = \frac{q}{D} \quad (1)$$

где $q(x, y)$ — интенсивность поперечной нагрузки, а D — жесткость плиты.

Полагается далее, что прогиб также точно удовлетворяет на контуре геометрическому условию $W = 0$.

Статическое контурное условие $M = 0$, где M — контурный изгибающий момент, удовлетворяется приближенно, согласно принципу Сен-Венана. Обозначим стороны прямоугольника через a и b , а координатные оси OX и OY примем за оси симметрии.

Для общего случая уравнение упругой поверхности будет иметь вид:

$$\begin{aligned} W = & \frac{q}{8D} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^{(1)} \left[a \cdot \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi a}{2b} \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi x}{b} - \right. \\ & \left. - 2x \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi a}{2b} \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi x}{b} \right] \cos \frac{(2n-1)\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^{(2)} \times \\ & \times \left[b \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi y}{a} - 2y \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi b}{2a} \times \right. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\times \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi y}{a} \left| \cos \frac{(2n-1)\pi x}{a} \right.$$

где k — число, которое показывает на сколько частей разбит контур половины прямоугольника, а $C_{2k-1}^{(1)}$ и $C_{2k-1}^{(2)}$ — постоянные, подлежащие определению.

Легко убедиться, что выражение (2) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и контурному условию $W=0$.

Требуется, чтобы геометрическая сумма изгибающих моментов, действующих на каждую указанную часть контура, равнялась нулю. Учитывая при этом условия симметрии задачи, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{b}{2k}} M_x\left(\frac{a}{2}, y\right) dy = 0; \int_{\frac{b}{2k}}^{\frac{b}{2}} M_x\left(\frac{a}{2}, y\right) dy = 0; \dots; \int_{\frac{(k-1)b}{2k}}^{\frac{b}{2}} M_x\left(\frac{a}{2}, y\right) dy = 0 \\ \int_0^{\frac{a}{2k}} M_y\left(x, \frac{b}{2}\right) dx = 0; \int_{\frac{a}{2k}}^{\frac{a}{2}} M_y\left(x, \frac{b}{2}\right) dx = 0; \dots; \int_{\frac{(k-1)a}{2k}}^{\frac{a}{2}} M_y\left(x, \frac{b}{2}\right) dx = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где M_x и M_y — обычные обозначения для изгибающих моментов, причем

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Учитывая далее (2) и (4), из (3) нами получена следующая формула для общего случая при любом k разбиении контура

$$\{S\} \{C_{2k-1}^{(1)} \quad A_{2k-1}^{(1)}\} = -\{q^{(1)}\} \quad (5)$$

$$\{S\} \{C_{2k-1}^{(2)} \quad A_{2k-1}^{(2)}\} = -\{q^{(2)}\} \quad (6)$$

где $\{S\}$ является квадратной матрицей, строки которой — коэффициенты гиперболических функций $\{A_{2k-1}^{(1)}\}$ и $\{A_{2k-1}^{(2)}\}$ и постоянных $\{C_{2k-1}^{(1)}\}$ и $\{C_{2k-1}^{(2)}\}$, а колонки являются разностями синусов для каждой заданной области.

В открытом виде (5) имеет такой вид

$$\begin{array}{ccccccc}
\sin \frac{\pi}{2n} - \sin 0 & \sin \frac{3\pi}{2n} - \sin 0 & \dots & \sin \frac{(2k-1)\pi}{2k} - \sin 0 & & & \\
\sin 2 \frac{\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n} & \sin 2 \frac{3\pi}{2n} - \sin \frac{3\pi}{2n} & \dots & \sin 2 \frac{(2k-1)\pi}{2k} - \sin \frac{(2k-1)\pi}{2k} & & & \\
\sin 3 \frac{\pi}{2n} - \sin 2 \frac{\pi}{2n} & \sin 3 \frac{3\pi}{2n} - \sin 2 \frac{3\pi}{2n} & \dots & \sin 3 \frac{(2k-1)\pi}{2k} - \sin 2 \frac{(2k-1)\pi}{2k} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
\sin k \frac{\pi}{2k} - \sin (k-1) \frac{\pi}{2k} & \sin k \frac{3\pi}{2k} - \sin (k-1) \frac{3\pi}{2k} & \dots & \sin k \frac{(2k-1)\pi}{2k} - \sin (k-1) \frac{(2k-1)\pi}{2k} & & & \\
& & & - \sin \frac{(k-1)(2k-1)\pi}{2k} & & &
\end{array}$$

[S]

(7)

$$\begin{bmatrix} C_1^{(1)} & A_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} & A_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ C_{2k-1}^{(1)} & A_{2k-1}^{(1)} \end{bmatrix} = - \frac{qb^3}{192D2k^3} \begin{bmatrix} 3k^3-1 \\ (3k^2-1)-6 \\ |(3k^2-1)-6|-2 \cdot 6 \\ \vdots \\ 3k-1 \end{bmatrix}$$

{q⁽¹⁾}

$$\text{где } A_1^{(1)} = \text{ch}^2 \frac{\pi a}{2b}, A_2^{(1)} = \text{ch}^2 \frac{3\pi a}{2b}, \dots, A_{2k-1}^{(1)} = \text{ch}^2 \frac{(2k-1)\pi a}{2b}$$

Аналогичную формулу типа (7) можно написать и для (6) в открытом виде.

Следует обратить внимание, что в (7)

$$2k^3 = (3k^2-1) + |(3k^2-1)-6| + \{ |(3k^2-1)-6|-2 \cdot 6 \} + \dots + (3k-1) \quad (8)$$

где $k=1; 2; 3; 4; \dots$

Элементы квадратной матрицы [S], фактически, для нашей задачи, являются числами влияния, как это принято в методах конечных разностей и элементов [3, 4, 5, 7]. Обращая матрицу [S] по Фробениусу [6] (при небольшом разбиении контура) или с помощью ЭВМ (при большом разбиении контура) легко можно определить постоянные $\{C_{2k-1}^{(1)}\}$ и $\{A_{2k-1}^{(1)}\}$.

Таким образом, из (5) и (6) будем иметь [6]

$$\{C_{2k-1}^{(1)} A_{2k-1}^{(1)}\} = -[S]^{-1} \{q^{(1)}\} \quad (9)$$

$$\{C_{2k-1}^{(1)} A_{2k-1}^{(1)}\} = -[S]^{-1} \{q^{(1)}\} \quad (10)$$

Для квадратной плиты ($a=b$) имеем

$$\{C_{2k-1}^{(1)}\} = \{C_{2k-1}^{(1)}\} = \{C_{2k-1}\}, \quad \{A_{2k-1}^{(1)}\} = \{A_{2k-1}^{(1)}\} = \{A_{2k-1}\}, \quad \{q^{(1)}\} = \{q^{(1)}\} = \{q\}$$

Формулы (9) и (10) примут вид

$$\{C_{2k-1}A_{2k-1}\} = -[S]^{-1}\{q\} \quad (11)$$

Рассмотрим несколько примеров. Предположим, что $k=1$, то есть рассматривается половина обеих сторон прямоугольника. Тогда из (7) очень легко можно получить решение задачи, рассмотренной в [1].

Допустим, что $k=2$, тогда из (7), учитывая (8), получим

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{\pi}{4} & \sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} & \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1^{(1)}A_1^{(1)} \\ C_3^{(1)}A_3^{(1)} \end{vmatrix} = -\frac{qb^3}{192D16} \begin{vmatrix} 11 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Решение этой системы не представляет трудностей. Определим обратную матрицу $[S]^{-1}$, далее учитывая (9) и (10), определим постоянные $C_1^{(1)}$ и $C_3^{(1)}$, $C_1^{(2)}$ и $C_3^{(2)}$. Они равны

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= -0.987 \frac{qb^3}{192Dch^2 \frac{\pi a}{2b}}, & C_3^{(1)} &= -0.987 \frac{qa^3}{192Dch^2 \frac{\pi b}{2a}} \\ C_3^{(2)} &= 0.014 \frac{qb^3}{192Dch^2 \frac{3\pi a}{2b}}, & C_1^{(2)} &= 0.014 \frac{qa^3}{192Dch^2 \frac{3\pi b}{2a}} \end{aligned} \quad (12)$$

Для квадратной плиты из (12) получим

$$C_1^{(1)}=C_3^{(2)} = -0.987 \frac{qa^3}{192Dch^2 \frac{\pi}{2}}, \quad C_3^{(1)}=C_1^{(2)} = 0.014 \frac{qa^3}{192Dch^2 \frac{3\pi}{2}} \quad (13)$$

Из (2) и (13) определим прогиб в центре квадратной плиты. Используя таблицы для гиперболических функций [8], получим $W=0.0041qa^4/D$.

По О. М. Сапонджяну [1], то есть когда $k=1$, $W=0.0040qa^4/D$.

Погрешность результата О. М. Сапонджяна составляет 2.4%.

Согласно формулам (2), (4) и (13) определим значение изгибающего момента в центре квадратной плиты

$$M = \frac{qa^3}{16} (1+\mu) \left(1 - 0.987 \frac{\pi}{3ch \frac{\pi}{2}} + 0.014 \frac{\pi}{ch \frac{3\pi}{2}} \right)$$

Приняв коэффициент Пуассона $\mu=0.3$, получим $M=0.0478qa^2$.

По О. М. Сапонджяну [1] $M=0.0473 qa^2$.

Погрешность результата О. М. Сапонджяна равна 1.1%. По Б. Г. Галеркину [2] $M=0.0479qa^2$.

Погрешность нашего результата с точным решением Б. Г. Галеркина составляет 0.2%.

Таблица 1

Значения прогибов и изгибающих моментов к задаче об опоре и прямоугольной плите с применением принципа Сен-Венана

Соотноше- ние a/b	Значения k											
	1			2			3			4		
	W	M_x	M_y	W	M_x	M_y	W	M_x	M_y	W	M_x	M_y
1	0.034063	0.0473	0.0173	0.0405	0.04784	0.04784	0.06406	0.0479	0.0179	0.00106	0.0479	0.0479
1.5	0.00757	0.0803	0.0485	0.00772	0.08124	0.05001	0.0078	0.0813	0.0502	0.0078	0.0813	0.0502
2	0.00971	0.0998	0.0433	0.01080	0.10214	0.04683	0.0101	0.1022	0.0469	0.0101	0.1022	0.0469

В табл. 1 коэффициент Пуассона равен 0,3, а множители прогибов и моментов соответственно имеют вид $\frac{qa^4}{l^3}$ и qa^3 .

В табл. 1 приведены результаты прогибов и моментов для квадратной и прямоугольных плит, при $k = 1 \div 4$ разбиении контура. Как видно из таблицы, при $k \geq 3$ разбиении контура полученные результаты не дают существенного эффекта, поскольку гиперболические синусы и косинусы при больших значениях почти равны.

При использовании метода конечных элементов для решения задачи квадратной свободно опертой плиты, при делении плиты на четыре элемента максимальные величины прогиба и изгибающего момента имеют следующие значения:

$$W = 0,01245 \frac{qa^4}{D}, \quad M = 0,0572 \frac{qa^2}{D}$$

А при делении плиты на 16 элементов имеем:

$$W = 0,00354 \frac{qa^4}{D}, \quad M = 0,0473 \frac{qa^2}{D}$$

Расхождение максимальных прогибов и моментов при делении области плиты на 16 элементов, с нашими результатами, полученные при $k = 3$, соответственно составляют $-3,0\%$ и $+1,7\%$.

Аналогичные сравнения можно провести и с результатами решения, полученными методом конечных разностей [1].

В заключение отметим, что при решении задачи об изгибе свободно опертых прямоугольных плит целесообразно использовать принцип Сен-Венана, который дает возможность при небольшом разбиении контура получать приближенное (если не точное) решение задачи, что и имеет место в методах конечных разностей и элементов.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE ST. VENANT PRINCIPLE WITH THE FINITE ELEMENTS AND DIFFERENCES METHODS AS APPLIED TO FREE-SUPPORTED RECTANGULAR THIN ELASTIC PLATES

G. S. GEVORKIAN

ԱՐԱՏ ՀԵՂԱՆԻ ԲԱՐՈՒՆ ԱՌԱՋԳՈՒՄԸ ՈՒՂԱԿՅՈՒՆ ՈՍԿԵՐԻ
ԿՈՍՏԱՆԴՆՈՒ ՍԵՆ-ՎԵՆԱՆԻ ՍԴՐՈՒՆԵՐԻ ԵՎ ԳԵՐՋԱՆԻՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ
ՀԱՐԿՈՒՄՏԱԿԱՆ ՎԵՐՄԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ. Ս. ԳԵՎՈՐԿԻԱՆ

Ա. Ս. Վ. Ս. Վ. Ս. Վ.

Աշխատանքում, Սեն-Վենանի սկզբունքի սգնությունը ստացվում է չեն ված ուղղանկյուն ստի ծածան խնդրի ընդհանուր լուծումը: Ենթադրաբար բաշխված բևի ազդեցության տակ՝ եզրագծի ջանկալիքը բաշխվածության սկզբ

բով: Օրինակներ հետ համեմատությունը ցույց է տալիս ստացված որ-
դյունների բավարար հանգրվաններ մոտավոր և ճշգրիտ լուծումների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Салонджян О. М. Применение принципа Сен-Венана к решению задачи теории упругости.—Юбилейный сб. научн. тр. ЕРПН, Ереван, 1960.
2. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты.—Л.—М.: Госстройиздат, 1933.
3. Варвак И. М., Варвак А. И. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций.—М.: Стройиздат, 1977.
4. Варвак И. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. В 2-х частях.—Киев: Изд-во АН УССР, 1949, 1952.
5. Безухов Н. И., Лужин О. В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач.—М.: «Высшая школа», 1974.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.: Наука, 1967.
7. Справочник по теории упругости. Под редакцией И. М. Варвака и А. Ф. Рябова, «Будівельник», Киев, 1971.
8. Качаков И. С. Компактные шестизначные математические таблицы. Л.: Машиностроение, 1970.

Ереванский политехнический
институт

Поступила в редакцию
10.X.1989