ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 5, 1990 Механика

УДК 539.3

О НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПОЛОГИХ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК

ГНУНИ В. Ц.

Известно [1], что нелинейная система разрешающих уравнений гибких оболочек (панелей двоякой кривизны k_x, k_y) в определенном диапазоне нагрузок $q_* \leq q \leq q^*$, начиная с некоторого значения параметра кривизны k, допускает три решения $f_i = f_i(q)$ ($i=1, 2, 3$), где f и q — параметры прогиба и нагрузки, действующей со стороны выпуклости оболочки. Однако, нелинейная система разрешающих уравнений гибких панелей двоякой кривизны допускает нетривиальное ($f \neq 0$) решение и в случае незагруженной ($q=0$) оболочки.

Целью настоящей работы является исследование этих решений

1. В первом приближении для пологой гибкой оболочки двоякой кривизны можно получить соотношение [1]

$$Kf - \alpha f^2 + \beta f^3 = 0 \tag{1.1}$$

где введены обозначения

$$K = k^2 + \frac{\pi^4(1+\lambda^2)^4}{12(1-\nu^2)}, \quad \alpha = 16k\lambda^2, \quad \beta = \frac{512}{9}\lambda^4$$

$$k = (k_y + \lambda^2 k_x)\frac{a^2}{h}, \quad \lambda = \frac{a}{b}$$

a, b — размеры оболочки в плане, f — безразмерный (деленный на толщину h) прогиб в центре оболочки, ν — коэффициент Пуассона материала.

Необходимо отметить, что соотношение (1.1) получено для панели с граничными условиями

$$v = w = 0, \quad T_{11} = 0, \quad M_{11} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a$$

$$u = w = 0, \quad T_{22} = 0, \quad M_{22} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b \tag{1.2}$$

которым тождественно удовлетворяет представление (первое приближение по методу Бубнова-Галеркина)

$$w = w_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \quad \Phi = \Phi_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{1.3}$$

где u, v, w — перемещения точек срединной поверхности оболочки соответственно по направлениям координатных осей Ox, Oy, Oz; T_{ik} —усилия, M_{ik}—моменты, Φ—функция усилий.

Уравнение (1.1) при

$$k \geqslant \pi^2 \sqrt{\frac{2}{3(1-\nu^2)}}(1+\lambda^2)^2 \tag{1.4}$$

допускает три решения

$$f_1=0, \quad f_{2,3}=\frac{9k}{64\lambda^2}\left(1 \mp \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{2\pi^4(1+\lambda^2)^4}{3(1-\nu^2)k^2}}\right) \tag{1.5}$$

В частном случае квадратной в плане оболочки ($\lambda=1$) при $\nu=0{,}3$ из (1.5) получается

$$f_1=0, \quad f_{2,3}=\frac{9k}{64}\left(1 \mp \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1140}{k^2}}\right) \tag{1.6}$$

Из соотношений (1.5), (1.6) получаются условия существования ненулевых решений для оболочек с произввльным отношением сторон и для оболочек квадратных в плане при $\nu=0{,}3$

$$k \geqslant \pi^2(1+\lambda^2)^2\sqrt{\frac{2}{3(1-\nu^2)}}, \quad k \geqslant 33{,}8 \tag{1.7}$$

Из второго соотношения (1.7) для оценки радиуса цилиндрической и сферической оболочек квадратных в плане соответственно получается

$$R \leqslant 0{.}0296\,\frac{a^2}{h}, \quad R \leqslant 0{,}0592\,\frac{a^2}{h} \tag{1.8}$$

В табл. 1 для различных значений параметра кривизны k квадратной в плане оболочки приводятся значения безразмерных прогибов в центре оболочки.

Таблица 1

f \ k	34	36	38	40	42	44	46	48	50
f_1	4.6	4.5	4.5	4.6	4.7	4.9	5.0	5.2	5.3
f_3	5.0	5.6	6.2	6.6	7.1	7.5	7.9	8.4	8.8

Здесь может возникнуть правомерный вопрос, что полученные решения являются результатом приближения. Однако, как показано в [1], решение (1.3) для рассмотренного диапазона кривизны оболочки качественно правильно описывает деформированное состояние оболочки. Кроме того, в [1] для длинных гибких цилиндрических панелей приведено точное решение нелинейной задачи выпучивания и при $q=0$ получается, что

$$f_2=\begin{cases}1{,}7 & \text{при} \quad k=10\\ 3{,}5 & \text{при} \quad k=20\\ 4{,}2 & \text{при} \quad k=30\end{cases} \qquad f_3=\begin{cases}2{,}2 & \text{при} \quad k=10\\ 5{,}1 & \text{при} \quad k=20\\ 7{,}9 & \text{при} \quad k=30\end{cases}$$

В этом примере ненулевые решения получаются для меньших кривизн панели, так как предполагается, что длинные кромки панели ($x=0$, $x=a$) не смещаются.

Таким образом, существование нетривиальных решений очевидно. Представляет интерес исследование этих решений на устойчивость и на прочность.

2. Как показано в работе [2], частоты собственных колебаний около изогнутых положений равновесия оболочки определяются формулой

$$\omega_{mn}^2=\omega_{0mn}^2\left(1-2\frac{e_{mn}}{K_{mn}}f_i+3\frac{d_{mn}}{K_{mn}}f_i^2\right) \tag{2.1}$$

где $\omega_{0mn}=\sqrt{\dfrac{K_{mn}}{\rho h}}$ — частота собственных колебаний панели около неизогнутого ($f_i=f_1=0$) состояния оболочки,

$$\begin{gathered}K_{mn}=D(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2+Eh\frac{(k_y\lambda_m^2+k_x\mu_n^2)^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\\ e_{mn}=\frac{Eh}{2}\left[\frac{k_y\lambda_1^2+k_x\mu_1^2}{(\lambda_1^2+\mu_1^2)^2}+\frac{2(k_y\lambda_m^2+k_x\mu_n^2)}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\right]\beta_{mn}\\ d_{mn}=\frac{Eh}{3}\left[\frac{\beta_{11}}{2(\lambda_1^2+\mu_1^2)^2}+\frac{\beta_{mn}}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\right]\beta_{mn}\\ \beta_{mn}=\frac{32}{ab}\frac{mn}{(4m^2-1)(4n^2-1)}\left[2mn\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\mu_n^2+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\lambda_m^2\right)-\lambda_m\mu_n\right]\end{gathered} \tag{2.2}$$

$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ — жесткость на изгиб, E — модуль Юнга, ρ — плотность материала оболочки; m, n — числа полуволн.

Следует отметить, что результаты работы [2], полученные для гибких цилиндрических оболочек, здесь обобщены на случай гибких оболочек двоякой кривизны.

Собственные значения (2.1) соответствуют собственным функциям

$$\Phi=\Phi_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y, \quad w=w_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y \tag{2.3}$$

где $\lambda_m=m\pi/a$, $\mu_n=n\pi/b$

Как показывают вычисления, квадраты частот собственных колебаний около второго (f_2) положения равновесия незагруженной панели — отрицательные, а около третьего (f_3) — положительные. Так, например, для квадратной ($a=b$) в плане оболочки при $\nu=0{,}3$

$$\omega_{11}^2=\frac{256Eh^2}{9\rho a^4}\left(f_i-\frac{9}{64}k\right)f_i \tag{2.4}$$

и как видно из (1.6)

$$f_1<\frac{9k}{64},\quad f_2>\frac{9k}{64} \tag{2.5}$$

что показывает неустойчивость нетривиальных решений, определяемых через f_1 и устойчивость решений, определяемых через f_2. Полученный результат физически ясен. Очевидно, между двумя устойчивыми решениями $f_1=0$ и f_2 должно находиться неустойчивое решение $f_1<f_3<f_2$.

Таким образом, устойчивыми являются недеформированное $f_1=0$ и деформированное

$$f_2=\frac{9k}{64}\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1140}{k^2}}\right) \tag{2.6}$$

состояния незагруженной оболочки.

3. В случае нетривиальных решений нелинейной системы разрешающих уравнений гибких оболочек двоякой кривизны, обусловленных f_2, в оболочке устанавливается некоторое напряженное состояние. В этом случае для функций прогиба w и усилий Φ в первом приближении по методу Бубнова-Галеркина получается [1]

$$w=f_2h\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$
$$\Phi=\frac{Eh^3}{\pi^2(1+\lambda^2)^2}\left(k-\frac{16}{3}\lambda^2f_2\right)f_2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{3.1}$$

через которые определяются основные напряжения (σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}) в произвольной точке оболочки

$$\sigma_{11}=\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$\sigma_{22}=\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{3.2}$$
$$\sigma_{12}=-\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

Напряжения (3.2) должны удовлетворять условию

$$\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+3\sigma_{12}^2\leqslant\sigma_{доп} \tag{3.3}$$

для любого $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $-0{,}5h\leqslant z\leqslant 0{,}5h$.

Не нарушая общности рассуждений, для простоты выкладок рассмотрим случай квадратной ($\lambda=1$) в плане панели при $\nu=0{,}3$. В этом случае из условия (3.3) в силу (3.1) и (3.2) получается система неравенств

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{a} &\leqslant \sqrt{\frac{2\sigma_{\text{доп.}}}{E}} \left[\left(\frac{k}{2} + 14{,}1 \right) f_1 - \frac{8}{3} f_1^2 \right]^{-1/2} \\
\frac{h}{a} &\leqslant \sqrt{\frac{2\sigma_{\text{доп.}}}{\sqrt{3}E}} \left[\left(\frac{k}{2} + 7{,}59 \right) f_1 - \frac{8}{3} f_1^2 \right]^{-1/2}
\end{aligned}
\qquad (3.4)
$$

Условия (3.4) получаются из (3.3) при $x=a/2$, $y=a/2$, $z=-\frac{h}{2}$ или $x=0$, $y=0$, $z=\frac{h}{2}$, где левая часть (3.3) принимает максимальные значения (наиболее опасные точки).

В табл. 2 приводятся значения допускаемой относительной толщины оболочки, до которой нетривиальное решение, определяемой f_1, удовлетворяет условию (3.3) при $\sigma_{\text{доп.}}/E=0{,}005$ (I строка) и $\sigma_{\text{доп.}}/E = 0{,}0005$ (II строка).

Таблица 2

k	34	36	38	40	42	44	46	48	50
I	1.01	0.985	0.960	0.937	0.916	0.897	0.878	0.861	0.845
II	0.320	0.312	0.304	0.296	0.290	0.284	0.278	0.272	0.267

Как показывают результаты, приведенные в табл. 2, лишь весьма тонкие и пологие оболочки допускают прощелкнутое состояние равновесия незагруженной оболочки в пределах упругости.

ON NON-TRIVIAL SOLUTIONS OF FLEXIBLE SHELLS EGUATIONS

V. TS. GNUNY

ՃԿՈՒՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրված են ճկուն թաղանթների ոչ գծային հավասարումների որոշիչ համակարգի ոչ զրոյական լուծումները, երբ թաղանթը ազատ է արտաքին գործոնների ազդեցությունից: Այդպիսի լուծումները անվանվում են սեփական լուծումներ և ստացված է այդ լուծումների գո-

յության պայմանը, կախված թաղանթի կորության բնութագրիչ մեծություններից։

Ուսումնասիրված է սեփական լուծումների կայունությունը և ցույց է տրված, որ ոչ զրոյական երկու լուծումներից մեկը անկայուն է, իսկ մյուսը կայուն։ Գտնված է թաղանթի այն հարաբերական հաստությունը՝ կախված կորության բնութագրիչից, մինչև որը թաղանթում առաջացած լարվածային վիճակը բավարարում է ամրության պայմանին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки.—М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
2. *Гнуни В. Ц.* О собственных колебаниях цилиндрической панели, загруженной внешним давлением.—Инж. журнал МТТ, 1968, №2, с. 127—130.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
19.XII.1988