

УДК 539.3:537.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ  
 ПОЛЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЕКТОРЕ ИЗ  
 ПЬЕЗОКРИСТАЛЛА

ГАЛПЧЯН П. В.

В работе рассматривается краевая задача электроупругости для призматического тела из пьезокристалла класса *6mm* гексагональной системы с поперечным сечением в виде сектора.

Задачам электроупругости посвящены ряд работ, источники которых можно найти и [1]. В этой же работе рассмотрено электроупругое антиплоское равновесие цилиндрического сектора из пьезокристалла *6mm*, в которой исследованы характеры особенностей в точках смены граничных условий. При рассмотренных граничных условиях поставленные краевые задачи в этой работе разделились на две независимые и сведены к задачам электростатики для потенциала  $\Phi$ .

В настоящей работе исследуется сопряженное электроупругое состояние продольного сдвига.

1. Как и в [1], предполагается, что главная ось симметрии пьезокристалла проходит через вершину сектора параллельно к образующим призмы. Принимается цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ , ось  $z$  которой совпадает с главной осью кристалла ( $0 \leq r \leq r_1$ ,  $-\alpha' \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $-\infty < z < \infty$ ,  $0 < \alpha < \pi$ ).

Система уравнений, описывающая электроупругое равновесие, при отсутствии массовых сил будет иметь вид [2, 3]

$$\Delta u_z = 0, \quad \Delta \Phi = 0 \quad (1.1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $u_z$  — упругое перемещение,  $\Phi$  — электростатический потенциал.

Уравнениями состояния будут:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= c_{44} \gamma_{rz} - e_{15} E_r, & \tau_{\varphi z} &= c_{44} \gamma_{\varphi z} - e_{15} E_\varphi \\ D_r &= 4\pi e_{15} \gamma_{rz} + \epsilon_3 E_r, & D_\varphi &= 4\pi e_{15} \gamma_{\varphi z} + \epsilon_3 E_\varphi \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \quad E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

В этих соотношениях  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\varphi z}$  — компоненты тензора напряжений;

Где  $\gamma_{rz}$  — компоненты деформаций;  $E_r, E_\varphi$  — компоненты вектора напряженности электрического поля;  $D_r, D_\varphi$  — компоненты вектора электрической индукции;  $c_{44}, e_{13}, \epsilon_1$  — соответственно модуль упругости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость.

Для сопряженного электромеханического поля граничные условия сформулированы следующим образом:

$$\tau_{rz}(r, \pm a) = 0, \quad \Phi(r, \pm a) = V^{\pm} r \quad (1.3)$$

$$u_r(r, \varphi) = 0, \quad D_r(r, \varphi) = 0 \quad (1.4)$$

На поверхностях  $\varphi = \pm a$  электрические граничные условия (1.3) можно реализовать различными способами:

а) с помощью конденсаторов, параллельно границам  $\varphi = \pm a$  создаются электрические поля напряженностями  $E_z = V^{\pm}$ ;

б) по металлизированным границам  $\varphi = \pm a$  протекают постоянные токи  $I_0^{\pm}$ , что соответствует разности потенциалов  $\Phi(r, \pm a) = V^{\pm} r$ .

В отличие от граничных условий (1.4), (1.5), сформулированных в [1], при условиях (1.4) граничная задача (1.1) — (1.4) не разделяется на две независимые и возникают некоторые трудности при построении решений по методу Фурье.

2. Рассмотрим параллельно два случая: полукруговое поперечное сечение ( $\alpha = \pi/2$ ) и секторное поперечное сечение ( $\alpha \neq \pi/2$ ) с произвольным углом  $\alpha$ .

Можно построить следующие решения уравнений (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.3):

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) &= \frac{2v_1}{\pi} r (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi \ln r) + v_1 r \sin \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \sin \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) k \\ u_r(r, \varphi) &= -\frac{e_{13}}{c_{44}} \Phi(r, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^k \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) k, \quad (\alpha = \pi/2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{v_1}{\sin \alpha} r \sin \varphi + \frac{v_2}{\cos \alpha} r \cos \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} B_k r^{k\beta} \sin(\alpha + \varphi) k\beta \quad (2.2)$$

$$u_r(r, \varphi) = -\frac{e_{13}}{c_{44}} \Phi(r, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{k\beta} \cos(\alpha + \varphi) k\beta, \quad (\alpha \neq \pi/2)$$

где  $v_1 = (V^+ - V^-)/2$ ,  $v_2 = (V^+ + V^-)/2$ ,  $A_k, C_k, B_k$  — постоянные, подлежащие определению,  $\beta = \pi/(2\alpha)$ .

Согласно (1.4), (1.2), (2.1) и (2.2), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_k^* \sin k\theta + a B_k^* \cos k\theta) = f_{1,j}(\theta) \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* k \sin k\theta - b B_k^* k \cos k\theta) = f_{2,j}(\theta)$$

где

$$b = \varphi + \pi/2, \quad A_k^* = A_k r_1^{k-1}, \quad B_k^* = C_k r_1^{k-1}$$

$$j = 1 \text{ при } \alpha = \pi/2;$$

$$\delta = \beta(\varphi + \alpha), \quad A_n^* = B_n r_1^{n-1}, \quad B_n^* = C_n r_1^{n-1}$$

$$j = 2 \text{ при } \alpha = \pi/2;$$

$$a = -\frac{c_{44}}{c_{11}}, \quad b = \frac{4\pi c_{13}}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{4\pi e_{11}}{c_{44}} + \epsilon_1$$

$$f_{1,1}(\theta) = \frac{2v_2}{\pi} \theta \cos \theta + (v_1 - v_2) \cos \theta + \frac{2v_2}{\pi} \ln r_1 \sin \theta$$

$$f_{1,1}(\theta) = \frac{2v_2}{\pi} \theta \cos \theta + (v_1 - v_2) \cos \theta + \frac{2v_2}{\pi} (1 + \ln r_1) \sin \theta$$

$$f_{1,2}(\theta) = -\frac{v_1}{\sin^2} \sin\left(\frac{2\alpha}{\pi} \theta - \alpha\right) - \frac{v_2}{\cos^2} \cos\left(\frac{2\alpha}{\pi} \theta - \alpha\right)$$

$$f_{2,1}(\theta) = f_{1,1}(\theta)/\beta$$

3. Умножив обе части равенств (2.3) на  $\sin m\theta$  ( $m=1,2,\dots$ ) и проинтегрировав их почленно в промежутке  $[0, \pi]$ , получаем соответственно

$$\frac{\pi}{2} A_m^* + a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m[1 - (-1)^{m-k}]}{m^2 - k^2} B_k^* = f_{1,1}^{(m)} \quad (3.1)$$

$$\frac{\pi}{2} A_m^* - b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k[1 - (-1)^{m-k}]}{m^2 - k^2} B_k^* = \frac{1}{m} f_{1,2}^{(m)}$$

где

$$\frac{1 - (-1)^{m-k}}{m^2 - k^2} = 0 \text{ при } m=k$$

$$f_{1,1}^{(1)} = v_2 \left( \ln r_1 - \frac{1}{2} \right), \quad f_{1,2}^{(1)} = v_2 \left( \ln r_1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$f_{1,1}^{(m)} = \frac{m}{m^2 - 1} \{v_2[1 + (-1)^m] - v_1[1 - (-1)^m]\}$$

$$f_{2,1}^{(m)} = f_{1,1}^{(m)} \quad (m=2,3,\dots)$$

$$f_{1,2}^{(m)} = \frac{4\pi^2 m}{2^m - (2\pi m)^2} \{v_2[1 + (-1)^m] + v_1[1 - (-1)^m]\}$$

$$f_{2,2}^{(m)} = f_{1,2}^{(m)}/\beta$$

Исключив теперь из (3.1)  $A_m^*$ , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $B_n^*$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k} x_k = -b^{(1)}/\beta, \quad m=1,2,\dots \quad (3.2)$$

где

$$x_n = B_{n-1}^* \quad (n=1,2,\dots), \quad b_n^{(1)} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{m} f_{1,2}^{(m)} - f_{1,1}^{(m)} \right)$$

$$a_{m,n} = \frac{[m+1(n-1)][1-(-1)^{m+(n-1)}]}{m^2-(n-1)^2}, \quad \lambda = \frac{b}{a} = -\frac{4\pi e_{15}^2}{4\pi e_{15}^2 + \epsilon_1 \epsilon_{44}}$$

4. Ограничиваясь в разложениях (3.2) первыми двумя членами, определяем коэффициенты  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ .

В случае полукругового поперечного сечения будем иметь

$$C_0 = \frac{v_2 r_1}{2a}, \quad C_1 = \frac{v_1}{2a+b}, \quad A_1 = \frac{v_2}{\pi} (2 \ln r_1 - 1)$$

Для секторного поперечного сечения с произвольным углом  $\alpha$

$$C_0 = \frac{4\pi v_2 r_1 (2\alpha - \pi)}{a(4\pi^2 - \alpha^2)}, \quad C_1 = \frac{2(1 - v_1 r_1^{-2})(\alpha - \pi)}{(16\pi^2 - \alpha^2)(2a + b)}, \quad B_1 = \frac{32\pi v_2 r_1^{-3}}{\alpha^2 - 4\pi^2}$$

Подставив найденные коэффициенты в (1.2), получим решения рассматриваемых выше задач.

В случае поперечного сечения в виде полукруга  $\gamma_{2r}$ ,  $\gamma_{\varphi}$ ,  $E$  и  $E_r$ , как следует из (2.1), обладают логарифмической особенностью, когда  $v_2 \neq 0$ . В случае же секторного поперечного сечения ( $\alpha \neq \pi/2$ ) с произвольным углом  $\alpha$  эти величины имеют особенность вида  $r^{\alpha-1}$ , что следует из (2.2).

Коэффициент особенности  $A$  составляющего вектора электрической индукции  $D_{\varphi}$  в случае призмы с полукруговым поперечным сечением, имеет вид

$$A = \left( \frac{4\pi e_{15}^2}{\epsilon_{44}} + \epsilon_1 \right) \frac{2v_2 \cos \varphi}{\pi}$$

Коэффициентом особенности  $B$  компонента напряжения  $\tau_{\varphi r}$  в случае призмы секторного поперечного сечения с произвольным углом  $\alpha$ , будет

$$B = \frac{6\pi^2 v_2 (\alpha - \pi) (4\pi e_{15}^2 + \epsilon_1 \epsilon_{44}) e_{15}}{\alpha (16\pi^2 - \alpha^2) (2\pi e_{15} - 4\pi e_{15}^2 - \epsilon_1 \epsilon_{44})}$$

Отсюда следует, что, когда  $V^* = V^-(v_1=0)$ , особенность в  $\tau_{\varphi r}$  исчезает ( $B=0$ ).

## THE COUPLED ELECTROMECHANICAL FIELDS DEFINITION IN A CYLINDRICAL SECTOR FROM PIEZOCRYSTAL

P. V. GALPCHIAN

ԿԱՊՎԱՄ ԷԼԵԿՏՐԱՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԳԱՇՏՆԻՒ ՈՐՈՇՈՒՄԸ  
ՊԻԵՋԱԲՅՈՒՐՆԵՂՅԱ ՓԷՆԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐՈՒՄ

Պ. Վ. ԳԱՊՃՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

*Ուսումնասիրված է պիեզաբյուրեղյա միջավայրի առանձնահատկություններ պարունակող կապված էլեկտրաառաձգական դաշտը:  
Բերված է բանաձև եղակիրություն գործակցի համար:*

ЛИТЕРАТУРА

1. Галгян П. В. Определение особенности вблизи вершины сектора из пьезокристалла.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987. т. 40, № 5, с. 35—39.
2. Балакирев М. К., Гильнский И. А. Волны в пьезокристаллах.—Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
3. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокристаллических тел.—Тепловые напряжения в элементах конструкции.—Киев: Наукова думка, 1975, вып. 15, с. 90—92.

Институт механики  
АН Армении

Поступила в редакцию  
11.X.1988