

УДК 539.3.

ИЗГИБ И КОЛЕБАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

БАГДАСАРЯН Г. Е., ФИЛИПОСЯН Г. Т.

Рассматриваются задачи изгиба и колебания двух параллельных сверхпроводящих пластин под действием продольного магнитного поля. Показано, что магнитное поле порядка одной десятой доли теслы может, во-первых, в несколько раз увеличить частоту свободных колебаний и, во-вторых, привести к возникновению изгибных напряжений, превышающих пределы пропорциональности материалов пластин. Проанализировано влияние напряженности магнитного поля и взаимное расположение пластин на указанные величины.

1. Рассмотрим магнитоупругую систему, состоящую из двух параллельных бесконечных диафрагм, между которыми действует на-

чальное постоянное продольное магнитное поле H_0 . Магнитные свойства среды, находящейся между диафрагмами, отождествляются со свойствами вакуума (вакуумный слой). Прямоугольная декартова система координат x_1, x_2, x_3 выбрана так, что координатная плоскость x_1, x_2 совпадает со срединной плоскостью вакуумного слоя. Начальное

магнитное поле $H_0(H_0, 0, 0)$ параллельно координатной линии ox_1 . Внутренние поверхности диафрагм ($x_3 = \pm b$) покрыты тонкими слоями сверхпроводящего сплава, толщины которых намного больше глубины проникновения магнитного поля и сверхпроводник (обычно порядка 10^{-5} см). Части диафрагм $|x_1| \leq a$, $|x_2| < \infty$ являются упругими пластинками, изготовленными из различных изотропных материалов (остальные части являются абсолютно жесткими и неподвижными).

Граничные условия на торцах $x_1 = \pm a$ таковы, что пластинки колеблются по форме цилиндрической поверхности с образующими параллельными координатной линии ox_2 . В дальнейшем, характеристики, относящиеся к верхней пластинке ($b < x_3 < b + 2b_1$), будем обозначать индексом «1», а к нижней ($-b - 2b_2 < x_3 < -b$) — индексом «2».

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие прониканию магнитного поля внутрь тела. Вследствие этого на внутренних поверхностях пластинок компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление поверхностных сил $\vec{q}$ магнитного происхож-

ления (действующие на поверхностях $x_3 = \pm b$), определяемые формулой [1]

$$\vec{q} = \vec{n} \cdot \vec{T} \quad (1.1)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к деформируемым поверхностям пластинок, $\vec{T}$ — тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{\delta_{ik}}{2} \vec{H} \cdot \vec{H} \right) \quad (1.2)$$

В (1.2) $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля в вакуумном слое $|x_3| < b$, который складывается из вектора напряженности заданного магнитного поля $\vec{H}_0$ и вектора напряженности индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, обусловленного деформациями пластинок ($\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$).

Пусть для рассматриваемых пластин справедлива гипотеза недеформируемых нормалей. Тогда уравнения колебаний пластин можно представить в следующем виде [2]:

$$D_k \frac{\partial^4 w_k}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \delta_k \frac{\partial}{\partial x_3} (\sigma_{13}^{(k)+} + \sigma_{13}^{(k)-}) = \sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-} \quad (1.3)$$

($k=1, 2$)

Здесь w_k — прогиб, $D_k = 2E_k \delta_k^3 / 3(1 - \nu_k^2)$ — цилиндрическая жесткость, E_k — модуль упругости, ν_k — коэффициент Пуассона, $2\delta_k$ — толщина, ρ_k — плотность k -той пластинки, $\sigma_{13}^{(k)+}$ и $\sigma_{13}^{(k)-}$ — упругие напряжения. Знаками «+» и «-» отмечены значения напряжений на верхних ($x_3 = b + 2\delta_1$, $x_3 = -b$) и нижних ($x_3 = b$, $x_3 = -b - 2\delta_2$) поверхностях пластин соответственно.

Входящие в уравнения (1.3) неизвестные величины $\sigma_{13}^{(k)\pm}$ и $\sigma_{33}^{(k)\pm}$ определяем, используя условия на поверхностях $x_3 = \pm b \pm 2\delta_k$ и $x_3 = \pm b$. В силу того, что магнитное поле в областях $x_3 > b$ и $x_3 < -b$ отсутствует, указанные условия запишутся в виде

$$\sigma_{13} n_1 = T_{13} n_1 \quad (1.4)$$

Из (1.4), с учетом (1.2), после линеаризации имеем

$$\sigma_{13}^{(1)-} = 0, \quad \sigma_{13}^{(1)+} = 0, \quad \sigma_{13}^{(2)-} = 0, \quad \sigma_{13}^{(2)+} = 0$$

$$\sigma_{33}^{(1)-} = \frac{H_{01}}{4\pi} h_3^+, \quad \sigma_{33}^{(1)+} = -\frac{H_{01}}{8\pi} - \frac{H_{01}}{4\pi} h_1^-, \quad \sigma_{33}^{(2)+} = \frac{H_{01}}{4\pi} h_3^-$$

$$\sigma_{33}^{(2)-} = -\frac{H_{01}}{8\pi} - \frac{H_{01}}{4\pi} h_1^+$$

где

$$h_k^\pm = h_k(x_1, \pm b, t), \quad (k=1,3)$$

2. Рассматривая систему уравнений (1.3), замечаем, что она не замкнута. В нее, кроме прогибов w_k пластинок, входят неизвестные граничные значения $h_k^\pm$ индуцированного в вакуумном слое магнитного поля $\vec{h}$. Их определяем [3, 4], решая уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (2.1)$$

в области $|x_3| < b$, при следующих поверхностных условиях непроницаемости магнитного поля в толщу пластинок:

$$(\vec{H}_0 + \vec{h}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = \pm b \quad (2.2)$$

Введя потенциалную функцию φ посредством

$$\vec{h} = \operatorname{grad} \varphi \quad (2.3)$$

и учитывая, что части $|x_1| > a$ поверхностей $x_3 = \pm b$ не деформируются, задача определения индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, согласно (2.1) и (2.2), после линеаризации сводится к решению следующей краевой задачи для уравнения Лапласа в слое $|x_3| < b$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \begin{cases} 0, & |x_1| > a, \quad x_3 = \pm b \\ H_{01} \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, & |x_1| < a, \quad x_3 = b \\ H_{01} \frac{\partial w_2}{\partial x_1}, & |x_1| < a, \quad x_3 = -b \end{cases} \quad (2.4)$$

Задача (2.4) решена при помощи интегрального преобразования Фурье по переменной x_1 . Используя это решение из (2.3), определено индуцированное в слое магнитное поле $\vec{h}$ и путем предельного перехода ($x_3 \rightarrow \pm b$) получены следующие представления интересующих нас величин $h_k^\pm$:

$$h_3^\pm = H_{01} \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \quad h_2^\pm = H_{01} \frac{\partial w_2}{\partial x_1}, \quad h_1^\pm = \frac{H_{01}}{4b} \int_{-a}^a \left(\frac{1}{K} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - K \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right) \quad (2.5)$$

$$h_1^\pm = \frac{H_{01}}{4b} \int_{-a}^a \left(K \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right)$$

где для ядра $K(x, \xi)$ имеем

$$K(x, \xi) = \operatorname{th} \frac{\pi(\xi - x_1)}{4b}$$

Представляя (1.5) в (1.3) и учитывая (2.5), получим следующую систему связанных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений колебания пластинок:

$$D_k \frac{\partial^4 w_k}{\partial x_1^4} - 2\rho_k \dot{w}_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \frac{H_{01}^2 \delta_k}{4\pi} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_1^2} + \\ + \frac{H_{01}^2}{16\pi b} \int \left(K \frac{\partial w_{3-k}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) d\xi + (-1)^{k-1} \frac{H_{01}^2}{8\pi} \quad (k=1, 2) \quad (2.6)$$

К системе уравнений (2.6) в каждом конкретном случае необходимо присоединить обычные однородные условия закрепления краев $x_1 = \pm a$ пластинок.

Так как уравнения (2.6) и соответствующие граничные условия являются линейными, то решения поставленных задач будем искать в виде суммы

$$w_k(x_2, t) = w_k^{(1)}(x_1) + w_k^{(2)}(x_1, t)$$

где функции $w_k^{(1)}$ есть решения уравнений

$$D_k \frac{d^4 w_k^{(1)}}{dx_1^4} + \frac{H_{01}^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left(K \frac{dw_{3-k}^{(1)}}{d\xi} - \frac{1}{K} \frac{dw_k^{(1)}}{d\xi} \right) d\xi - \\ - \frac{H_{01}^2 \delta_k}{4\pi} \frac{d^2 w_k^{(1)}}{dx_1^2} - (-1)^{k-1} \frac{H_{01}^2}{8\pi} \quad (2.7)$$

удовлетворяющие тем же граничным условиям, что w_k . Функции $w_k^{(2)}$ являются решениями уравнений

$$D_k \frac{\partial^4 w_k^{(2)}}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \dot{w}_k^{(2)} \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{H_{01}^2 \delta_k}{4\pi} \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial x_1^2} + \\ + \frac{H_{01}^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left(K \frac{\partial w_{3-k}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial \xi} \right) d\xi = 0$$

при тех же граничных условиях.

Функция $w_k^{(1)}(x_1)$ представляет решения задач изгиба пластинок под действием магнитного давления. Решения $w_k^{(2)}$ характеризуют собственные магнитоупругие колебания рассматриваемой системы в продольном магнитном поле.

3. Рассмотрим задачу изгиба шарнирно зашпартых по краям $x_1 = \pm a$ пластинок, основанную на уравнениях (2.7). Для простоты ограничимся случаем, когда физико-механические и геометрические параметры пластинок одинаковые ($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$). Тогда, как видно из (2.7), $w_2^{(1)} = -w_1^{(1)}$ и для определения $w_1^{(1)} = w$ получим уравнение

$$D \frac{d^4 w}{dx_1^4} - \frac{H_{01}^2}{8\pi b} \int_{-a}^a \frac{dw}{dz} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-x_1)}{2b} dz - \frac{hH_{01}^2}{4\pi} \frac{d^3 w}{dx_1^3} = \frac{H_{01}^2}{8\pi}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (3.1)$$

Решение уравнения (3.1), удовлетворяющего условиям шарнирного опирания, представим в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \lambda_n (x_1 + a), \quad \lambda_n = n\pi/2a \quad (3.2)$$

где w_n — неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (3.2) в (3.1) и используя обычный процесс ортогонализации, приходим к следующей бесконечной системе линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно w_n :

$$x_m + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n = c_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

где

$$a_{mn} = \frac{aH_{01}^2 \lambda_m^2}{2\pi b i_{-n} R_m} A_{mn}, \quad c_m = \frac{[1 - (-1)^m] H_{01}^2}{8\pi a \lambda_m^{-1} R_m}, \quad R_m = D \lambda_m^4 + \frac{H_{01}^2 h}{4\pi} \lambda_m^2$$

$$A_{mn} = 4a^2 \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{cth} \frac{\pi a(u-v)}{b} \sin m\pi z \cos n\pi u du dv, \quad x_m = \lambda_m^2 w_m \quad (3.4)$$

Используя (3.4) и имея в виду, что $|A_{mn}| \leq M(\lambda_n)^{-1}$, где M — некоторая постоянная, легко показать, что система (3.3) при любом значении H_{01} квазирегулярна.

Из (3.2) и (3.3) определяем прогибы и на их основе изгибные напряжения в пластинках. В частности, для максимального (по x_1) значения напряжения ε_{11} при $x_2 = b + 2h$ в первом приближении получим

$$\max_{|x_1| < a} \varepsilon_{11} = \frac{3H_{01}^2}{\pi^2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left[1 + \frac{3(1-\nu^2)}{\pi^2 E} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{a}{b} \left(A_{11} + \frac{\pi b h}{4 a^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.5)$$

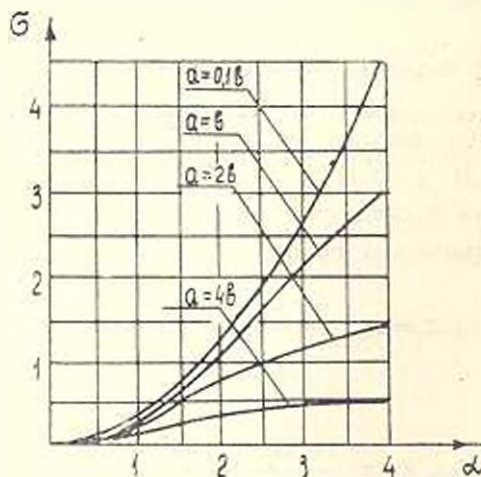
На основе (3.5) произведены вычисления (результаты которых представлены на фиг. 1) $\max_{|x_1| < a} \varepsilon_{11}$ в зависимости от напряженности магнитного поля $H_{01} = \alpha \cdot 10^9$ э при различных значениях a/b . Для расчета принято $E = 0,75 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,36$ (дюрал), $a = 10^3 \cdot h$. Результаты подсчета приведены на фиг. 1, где $\alpha = 10^{-9} \cdot \max_{|x_1| < a} \varepsilon_{11}$.

Из фиг. 1 видно, что: а) с увеличением расстояния между пластинками изгибные напряжения увеличиваются; б) при напряженности магнитного поля порядка 10^3 э появляются пластические деформации ($\max \varepsilon_{11} > \varepsilon_T$, ε_T — предел текучести).

4. Рассмотрим задачу собственных магнитоупругих колебаний на основе уравнений (2.8), предполагая края пластинок шарнирно опертыми. Тогда решения уравнений (2.8) можно представить в виде

$$w_k^{(2)}(x_1, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \sin n(x_1 + a) \right) \cos \omega t \quad (4.1)$$

где ω - частота колебаний, $u_n^{(k)}$ - неизвестные постоянные.



Фиг. 1.

Подставляя (4.1) в (2.8) и вступая аналогичным образом, как в пункте 3, приходим к следующим бесконечным системам линейных однородных уравнений относительно $u_n^{(1)}$ и $u_n^{(2)}$:

$$(1 - \theta_{1m}^2) x_{01}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn}^{(1)} x_n^{(2)} + b_{mn}^{(1)} x_n^{(1)}] = 0 \quad (4.2)$$

$$(1 - \theta_{2m}^2) x_m^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn}^{(2)} x_n^{(1)} + b_{mn}^{(2)} x_n^{(2)}] = 0$$

где

$$\theta_{km}^2 = \frac{\omega^2}{\omega_{km}^2}, \quad \omega_{km}^2 = \Omega_{km}^2 + \frac{H_{01}^2}{8\pi\rho_k} \lambda_{km}^2, \quad \Omega_{km}^2 = \frac{D_k \lambda_{km}^4}{2\sigma_k \delta_k} \quad (4.3)$$

$$a_{mn}^{(k)} = \frac{a H_{01}^2 \lambda_m^2}{8\pi b \rho_k \delta_k \lambda_n \omega_{km}^2} a_{mn}, \quad b_{mn}^{(k)} = \frac{a H_{01}^2 \lambda_m^2}{8\pi b \rho_k \delta_k \lambda_n \omega_{km}^2} b_{mn}$$

$$a_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{th} \frac{\pi(\tau - u)a}{2b} \cos n\pi\tau \sin m\pi u d\tau du$$

$$b_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{cth} \frac{\pi a(\tau - u)}{2b} \cos n\pi\tau \sin m\pi u d\tau du$$

$$x_m^{(k)} = i \omega_m^{(k)} u_m^{(k)}, \quad (k=1,2; m,n=1,2,3\dots).$$

В (4.3) ω_{km} — частоты собственных поперечных колебаний k -той пластинки в отсутствие магнитного поля.

Аналогичным образом, как в пункте 3, используя (4.3), показывается, что определитель системы (4.2) относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Используя условие существования нетривиального решения системы (4.2), получим характеристическое уравнение для определения частоты колебаний рассматриваемой магнитоупругой системы. Это уравнение в первом приближении имеет вид

$$(1 - \theta_{11}^2 + b_{11}^{(1)}) (1 - \theta_{21}^2 + b_{11}^{(2)}) - a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} = 0$$

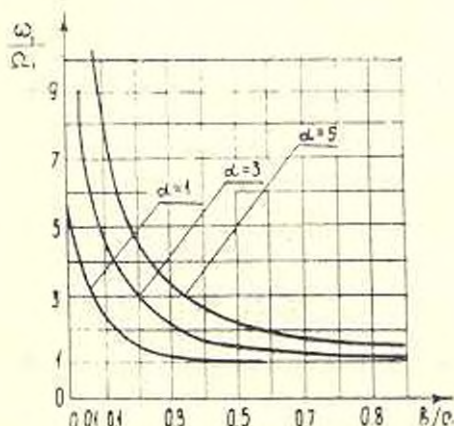
которое в случае одинаковых пластин ($E_1 = E_2 = E$, $\delta_2 = \delta_1 = h$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$) имеет следующие решения, определяющие частоты магнитоупругих колебаний:

$$\text{где} \quad \omega_1^2 = \Omega^2(1 + \alpha), \quad \omega_2^2 = \Omega^2(1 + \beta) \quad (4.4)$$

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 + \frac{H_{01}^2 a_1^2}{8\pi\rho}, \quad D = \frac{2Eh^2}{2(1-\nu^2)}, \quad \Omega_1^2 = \frac{D a_1^4}{2\rho h}$$

$$\alpha = \frac{H_{01}^2 a_1^2}{8\pi b \rho h \Omega^2} \cdot 2 \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{cth} \frac{\pi a(u-\tau)}{b} \cos \pi \tau \sin \pi u du d\tau$$

$$\beta = \frac{H_{01}^2 a_1^2}{8\pi b \rho h \Omega^2} \cdot 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \operatorname{sh} \frac{\pi a(u-\tau)}{b} \right|^{-1} \cos \pi \tau \cdot \sin \pi u du d\tau$$



Фиг. 2.

Рассматривая (4.4), замечаем, что система может колебаться с двумя различными частотами, причем ω_1 соответствует случаю $\omega_2^{(1)} = -\omega_1^{(1)}$ (симметричные колебания), а ω_2 — случаю $\omega_2^{(2)} = \omega_1^{(2)}$ (антисимметричные колебания).

На фиг. 2 показана зависимость ω, Ω_1 (где Ω_1 — первая частота свободных колебаний пластины при отсутствии магнитного поля) от относительного расстояния b/a между пластинками при различных значениях напряженности магнитного поля $H_0 = \alpha \cdot 10^3$ э. Для расчета принято, что пластинки изготовлены из дюралюминиевого материала, $h/a = 10^{-1}$ и $\tau = 1, 3, 5$. Из этой фигуры видно, что присутствие второй пластинки может существенно увеличить частоту колебаний, причем чем ближе расположены пластинки, тем сильнее влияние магнитного поля.

BENDING AND VIBRATION OF THE PARALLEL SUPERCONDUCTIVE PLATES IN A LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

G. E. BAGHDASARIAN, G. T. PILIPOSIAN

ԳԻՐՀԱՂՈՐԳԻՉ ԶՈՒԳԱՆՈՒ ՍԱՎԵՐԻ ԾՈՒՌՄԸ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Գ. Խ. ՓԻԼԻՓՈՍՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գիտարկված են երկաթնական մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ գտնվող երկու զուգահեռ գերհաղորդիչ սալերի ծոման և տատանումների խնդիրները: Ցույց է տրված, որ տեսլայի մեկ տասներորդ մասի կարգի մագնիսական դաշտը կարող է, առաջին, մի քանի անգամ մեծացնել ազատ տատանումների հաճախությունը, և երկրորդ՝ առաջացնել սալերի նյութերի համեմատականության սահմանները գերազանցող ծոռը լարումներ: Հենարկված է մագնիսական դաշտի լարվածության և սալերի փոխադարձ դիրքի ազդեցությունը նշված մեծությունների վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.—М.: Гостел-издат, 1957. 532 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Балубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977. 272 с.
3. Левитин М. Р. Колебания сверхпроводящей оболочки в магнитном поле. «Теоретические вопросы магнитоупругости», IV Симпозиум: Материал докладов.—Ереван, изд-во ЕГУ, 1989.
4. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. Устойчивость сверхпроводящей цилиндрической оболочки в магнитном поле.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1981, т. 34, № 6, с. 36—47.

Երևանский государственный
университет

Поступила в редакцию
19.IX.1989