ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, №4, 1990 Механика

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ КРУГЛОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА НАИБОЛЬШЕЙ ЖЕСТКОСТИ

ГРИГОРЯН С. А.

Варьированием расположением опорного контура и структурой материала находится проект круглой кольцевой пластинки наибольшей жесткости.

1. Пусть круглая кольцевая пластинка радиуса R с отверстием R_0 и толщиной h загружена постоянной нагрузкой q. Пластинка отнесена к цилиндрической системе координат так, что координатная плоскость $z=0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Предполагается, что пластинка собрана из элементарных слоев, армированных в радиальном и кольцевом направлениях. Как показано в [1], пакет пластинки можно считать ортотропным с жесткостями на изгиб

$$D_{11}=[(B_{11}^0-B_{22}^0)\xi-B_{22}^0]h^3/12$$

$$D_{22}=[(B_{22}^0-B_{11}^0)\xi-B_{11}^0]h^3/12,\quad D_{12}=B_{12}^0h^3/12 \tag{1.1}$$

где параметр ξ определяет относительное содержание радиально-армированных слоев в пакете пластинки. Принимается, что элементарные слои, армированные как в радиальном, так и в окружном направлениях, имеют одинаковое содержание армирующего материала в единице объема, так что упругие характеристики B_{ij}^0 этих слоев в ортогональных направлениях одинаковы [1].

При выводе этих выражений пренебрегались члены порядка $1/n$ и $1/n^2$, где n—общее число монослоев, армированных в радиальном и кольцевом направлениях [1].

Пусть пластинка опирается по контуру $r=R_1$, где $R_0\leqslant R_1\leqslant R$. Уравнение равновесия ортотропной пластинки относительно прогиба $W(r)$ представляется в виде [2]

$$D_{11}\frac{d^4W_i}{dr^4}+2D_{11}\frac{1}{r}\frac{d^3W_i}{dr^3}-D_{22}\frac{1}{r^2}\frac{d^2W_i}{dr^2}+D_{22}\frac{1}{r^3}\frac{dW_i}{dr}=q \tag{1.2}$$

где $i=1,2$ соответственно для областей $R_0\leqslant r\leqslant R_1$ и $R_1<r<R$.

Граничные условия записываются в виде

$$M_{11}^{(1)}=0,\quad N_1^{(1)}=0 \qquad \text{при } r=0$$

$$W_1=W_2=0,\ \frac{dW_1}{dr}=\frac{dW_2}{dr},\ M_{11}^{(1)}=M_{11}^{(2)}\quad \text{при } r=R_1 \tag{1.3}$$

$$M_{11}^{(2)}=0,\ N^{(2)}=0 \qquad \text{при}\quad r=R$$

Здесь $$M_{11}^{(i)}=-D_{11}\frac{d^2W_i}{dr}+D_{12}\frac{1}{r}\frac{dW_i}{dr}$$

$$N_1^{(i)}=-D_{11}\left(\frac{d^3W_i}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2W_i}{dr^2}\right)+D_{22}\frac{1}{r^2}\frac{dW_i}{dr} \tag{1.4}$$

—соответственно, изгибающий момент и поперечное усилие в сечениях $r=\text{const}$.

Решение краевой задачи (1.2) и (1.3) с учетом (1.4) имеет вид

$$\overline{W}_i=\frac{32}{(1-\overline{B}_{22}^0)\xi+\overline{B}_{22}^0}\left[A_{i1}+A_{i2}\gamma^2+A_{i3}\gamma^{1+k}+A_{i4}\gamma^{1-k}+\gamma^4/4(9-k^2)\right] \tag{1.5}$$

где $$\overline{W}_i=W_i\cdot 16B_{11}^0h^3/3qR^4.$$

В выражении для прогибов введены следующие обозначения:

$$A_{11}=C_1\beta^{1+k}-C_2\beta^{1-k}-C_7\beta^2+C_9\beta^{2-2k}+\alpha^2\beta^2/2(1-k^2)-\beta^4/4(9-k^2)$$

$$A_{21}=C_1\beta^{1+k}-C_2\beta^{1-k}-C_8\beta^2+C_{10}\beta^{2-2k}+\beta^2/2(1-k^2)-\beta^4/4(9-k^2)$$

$$A_{12}=-\alpha^2/2(1-k^2),\quad A_{22}=-1/2(1-k^2),\quad A_{13}=-C_1+C_6\beta^{1-k}$$

$$A_{23}=-C_1+C_7\beta^{1-k},\quad A_{14}=C_2-C_9\beta^{1-k},\quad A_{24}=C_2-C_{10}\beta^{1-k}$$

где

$$C_1=\frac{(1-\alpha^{3+k})}{(k+1)(k+\mu_0)(\alpha^{2k}-1)}\left[\frac{(1+\mu_0)}{(1-k^2)}-\frac{(3+\mu_0)}{(9-k^2)}\right];$$

$$C_2=\frac{(\alpha^{2k}-\alpha^{3+k})}{(k-1)(k-\mu_0)(\alpha^{2k}-1)}\left[\frac{(1+\mu_0)}{(1-k^2)}-\frac{(3+\mu_0)}{(9-k^2)}\right]$$

$$C_3=\frac{(1+\mu_0)(1-\alpha^2)}{(k+\mu_0)(k+1)(\alpha^{2k}-1)(1-k^2)},\quad C_4=\frac{(k-1)(k-\mu_0)(1-\alpha^2)}{2k(k+1)(k+\mu_0)(\alpha^{2k}-1)(1-k^2)}$$

$$C_5=\frac{\alpha^{2k}(1-\alpha^2)(1+\mu_0)}{(k-1)(k-\mu_0)(\alpha^{2k}-1)(1-k^2)},\quad C_6=\frac{(1-\alpha^2)}{2k(1-k^2)(\alpha^{2k}-1)},$$

$$C_7=C_3-(\beta^{2k}-1)C_4,\quad C_8=C_3\alpha^{2k}-(\beta^{2k}-\alpha^{2k})C_4$$

$$C_9=C_5-(\beta^{2k}-1)\alpha^{2k}C_6,\quad C_{10}=C_5-(\beta^{2k}-\alpha^{2k})C_6$$

$$k^2=\frac{D_{22}}{D_{11}}=\frac{(\overline{B}_{22}^0-1)\xi+1}{(1-\overline{B}_{22}^0)\xi+\overline{B}_{22}^0},\quad \gamma=r/R,\ \beta=R_1/R,\ \alpha=R_0/R$$

$$\mu_0=\frac{D_{12}}{D_{11}}=\frac{\overline{B}_{12}^0}{(1-\overline{B}_{22}^0)\xi+\overline{B}_{22}^0}$$

в которых $\overline{B}_{12}^0=B_{12}^0/B_{11}^0$ и $\overline{B}_{22}^0=B_{22}^0/B_{11}^0$.

Ставится задача нахождения оптимальных значений параметров ξ и β, обеспечивающих максимальную жесткость кольцевой пластинки, то есть

$$W_{\text{опт.}}=\min_{\xi,\beta}\max_{\gamma} W_i(\xi,\beta,\gamma) \tag{1.6}$$

при органичениях $0\leqslant\xi\leqslant 1$, $\alpha\leqslant\beta\leqslant 1$ и $\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$ при $i=1$, $\beta\leqslant\gamma\leqslant 1$ при $i=2$ и при заданных R, R_0, h, B^0_{11}, B^0_{22}, B^0_{12}, q.

В качестве примера рассматривается кольцевая пластинка, изготовленная из монослоев ортотропного боропластика армированных в радиальном или кольцевом направлениях. Разработан алгоритм решения задачи (1.6) и составлена соответствующая программа.

В табл. 1 приведены результаты оптимизации по ξ и β, а также значения $\min_{\xi,\beta}\max_{\gamma}\overline{W}$ для различных значений α (то есть относительных значений величины отверстия).

Таблица 1

α	ξ	β	γ	$\overline{W}_{\text{опт}}$
0,20	0,968	0,689	0,20	0,1564
0,25	0,942	0,700	0,25	0,1309
0,30	0,849	0,713	0,30	0,1120
0,35	0,887	0,727	0,35	0,0848
0,40	0,828	0,743	0,40	0,0673

Если принять α достаточно малым, то в результате вычислений получим проект, который совпадает с проектом для сплошной пластинки из того же материала [3]. Так, для кольцевой пластинки при $\alpha=10^{-6}$ имеем

$$\xi=0{,}95,\quad \beta=0{,}673,\quad \overline{W}=0{,}2196$$

для сплошной пластинки

$$\xi=0{,}95,\quad \beta=0{,}673\quad \overline{W}=0{,}2195$$

то есть разница получилась только в четвертом знаке для $\overline{W}$.

Для рассмотренных α наихудший по структуре проект достигается при $\xi=0$, то есть при пакете, составленном из монослоев, армированных только в кольцевом направлении. Для сопоставления в табл. 2 приводятся значения отношений $\overline{W}_*/\overline{W}_{\text{опт.}}$, где

$$\overline{W}_*=\max_{\xi}\min_{\beta}\max_{\gamma}\overline{W}_i(\xi,\beta,\gamma)=\min_{\beta}\max_{\gamma}\overline{W}(0,\beta,\gamma)$$

которые показывают эффект от структурной оптимизации. Приводятся также значения β и γ, при которых достигается $\overline{W}_*$.

Тадлица 2

α	β	γ	W_*	$\overline{W}_*/\overline{W}_{опт.}$
0,20	0,708	0,20	0,5508	3,52
0,25	0,716	0,25	0,5063	3,87
0,30	0,725	1,00	0,4505	4,02
0,35	0,736	1,00	0,3925	4,63
0,40	0,749	1,00	0,3278	4,87

Легко убедиться, что в результате структурной оптимизации существенно улучшается проект в смысле жесткости. Для оценки эффекта оптимизации, от варьирования расположением опорного контура, для $\alpha=0,4$ в табл. 3 приводятся значения $\max\limits_{\gamma} \overline{W}$ для различных β, при $\xi=0,828$.

Таблица 3

β	γ	$\min\limits_{\xi} \max\limits_{\gamma} \overline{W}$
0,40	1,00	$0,2371 \cdot 10^2$
0,50	1,00	$0,1397 \cdot 10^2$
0,60	1,00	$0,06624 \cdot 10^2$
0,70	1,00	$0,01548 \cdot 10^2$
0,743	0,40	$0,0006729 \cdot 10^2$
0,80	0,40	$0,02684 \cdot 10^2$
0,90	0,40	$0,09044 \cdot 10^2$
1,00	0,40	$0,1773 \cdot 10^2$

Здесь существенный выигриш в жесткости от оптимального выбора расположения опорного контура очевиден.

THE CIRCULAR RINGED PLATE OPTIMAL DESIGNING FROM COMPOSITE MATERIAL OF THE LARGEST RIGIDITY

S. A. GRIGORIAN

ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ԱՌԱՎԵԼԱԳՈՒՅՆ ԿՈՇՏՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Ս. Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է օրթոտրոպ օղակաձև կլոր սալի նախագծման խնդիրը։ Նյութի կառուցվածքի և հենման կոնտուրի դիրքի փոփոխությամբ գտնված է առավելագույն կոշտության սալ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белубекян Э. В., Гнуни В. Ц.* К вопросу проектирования гибкой круглой пластинки из композиционного материала.—Инж. проблемы строительной механики, Ереван, 1985 г., с. 72—76.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки.—М.: ОГИЗ, 1947. 354 с.
3. *Григорян С. А.* Проектирование оптимальной круглой пластинки из композиционного материала наибольшей жесткости.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1990. т. *43*, № 1, с. 32—35.

Поступила в редакцию
31.VII.1989

Институт механики
АН Армянской ССР