ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 43, № 4, 1990 Механика

УДК 539.3:534.222.2

ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИЭЛЕКТРИКА

АВЕТИСЯН А. С.

Область исследований, учитывающая взаимосвязь механического и электромагнитного полей, существенно расширяется и пользоваться линейной теорией электроупругости для описания взаимодействия этих полей в реальных средах можно не во всех случаях.

Как известно, в твердых телах могут распространяться различные типы упругих волн. Это, естественно, приводит к значительному многообразию нелинейных взаимодействий волн. Другим важным обстоятельством является то, что наиболее интересный класс твердых, диэлектрических тел (пьезокристаллы) имеют анизотропию, что в определенной мере усложняет рассмотрение нелинейных эффектов.

Важное место в нелинейной электроупругости занимают вопросы распространения электроакустических поверхностных волн. Общие основы нелинейной электромагнитоупругости изложены в работах [1—3] и др., в которых мало обращается внимание на нелинейные краевые задачи. Нелинейные электромагнитоакустические эффекты в твердых телах принято подразделять на статические (распространение волн при воздействии на тело постоянных механических или электромагнитных возмущений) и динамические (генерация гармоник или искажение формы волны, взаимодействие волн и т. д.).

В предлагаемой работе, исходя из основных положений нелинейной теории электромагнитоупругости, выведены нелинейные волновые соотношения для ограниченных пьезодиэлектриков. При этом учитывается как геометрическая, так и физическая нелинейности.

1. В механике сплошных сред существуют два способа описания движения точек тела. Первый, когда каждой точке среды приписываются координаты $x_m (m=1, 2, 3)$, которые в процессе деформации не изменяются (переменные Лагранжа). Во втором способе в качестве переменных используются координаты $\xi_j (j=1, 2, 3)$, которые определяют место точек в пространстве, изменяющееся в процессе деформаций. Переменные ξ_k называют эйлеровыми.

Если точки тела в процессе движения получают перемещения, определяемые вектором $\vec{u}$ с компонентами $u_k (k=1, 2, 3)$, то закон движения точек тела можно записать в форме

$$\xi_i(x_j,t)=x_i+u_i(x_j,t), \quad (i,j=1,2,3) \tag{1.1}$$

При приложении к телу внешних воздействий любой природы, в окресности любой точки тела характеристикой деформации является тензор деформации $\hat U$. Компоненты тензора связаны с компонентами вектора перемещения точек тела в лагранжевой форме описания следующим образом:

$$U_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \tag{1.2}$$

Здесь и далее, если это особо не оговорено, по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3, индексом после запятой обозначено дифференцирование по лагранжевым координатам.

При движении материальных тел в электромагнитном поле между средой и полем происходит силовое взаимодействие. Взаимодействие среды с электромагнитным полем приводит к тому, что на каждый элемент сплошной среды наряду с объемными силами механического происхождения $F_i^{м}$ действуют также пондеромоторные силы $F_i^{эм}$. В пьезодиэлектрической среде объемная сила электромагнитного происхождения (пондеромоторная сила) равна:

$$\vec F^{эм}=\rho\vec E-\frac{1}{2}E^2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon+\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\rho\right)=(\vec P\vec\nabla)\vec E \tag{1.3}$$

Здесь $\vec P$ — вектор электрической поляризации, $\vec E$ — вектор напряженности электрического поля.

Характерной особенностью сил близкодействия является возможность сведения их к натяжениям, возникающим в деформированных средах. При рассмотрении многих вопросов замена пондеромоторных сил эквивалентными им напряжениями оказывается весьма целесообразной [4, 5]. Между плотностью пондеромоторных сил $\vec F^{эм}$ и компонентами тензора напряжения электромагнитного происхождения t_{ij} (напряжения Максвелла), устанавливаются искомые дифференциальные соотношения

$$F_i^{эм}=\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.4}$$

Представления (1.4) справедливы с учетом симметричности тензора максвелловских напряжений $\hat t$ (то есть $t_{ij}=t_{ji}$). Максвелловские натяжения t_{ij} для анизотропных сред [4] (а пьезодиэлектрики — это существенно анизотропные материалы) записываются в следующем виде:

$$t_{ij}=\frac{1}{2}\left[E_iD_j+E_jD_i+H_iB_j+H_jB_i-\delta_{ij}(E_kD_k+H_mB_m)\right] \tag{1.5}$$

Как известно, в линейной электроупругости потенциальным магнитным полем пренебрегают, а малое вихревое магнитное поле электроакустической волны определяется с помощью уравнений

$$\varepsilon_{rpm} H_{m,p} = \dot{D}_r, \quad B_{k,k}=0, \quad B_k=\mu_{km} H_m \tag{1.6}$$

Ниже покажем, что в нелинейной электромагнитоупругости с учетом градиента деформации, в пьезодиэлектрике магнитное и электрическое поля взаимосвязаны.

Приведем уравнения движения материальной среды, описывающих взаимодействие их с электромагнитным полем, в материальных переменных. Подробный вывод уравнений движения среды и механических граничных условий можно найти в работах [6, 7] и др.

$$\left(J \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} T_{ij} \right)_{,k} = \rho_0 \ddot{u}_j \tag{1.7}$$

$$N_k \left[J \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} T_{ij} \right] = 0 \tag{1.8}$$

В электромагнитоупругих средах $T_{ij}=\sigma_{ij}+t_{ij}$ —термодинамические напряжения, определяемые из термодинамического потенциала соответствующей среды. Для удобства записи, скачок лагранжевых напряжений $L_{ij}=J T_{il} \partial x_j / \partial \xi_k$ на поверхности раздела электроупругих сред $L^+_{ij}-L^-_{ij}$ обозначается прямыми скобками $[L_{ij}]$.

2. Определение напряженно-деформированного состояния в электромагнитоупругой среде производится совместно с определением электромагнитного поля в среде и представляет собой совместную задачу теории упругости и электромагнетизма. Основы электромагнетизма и вывод уравнений Максвелла изложены в [4, 5] и др. Обычно уравнения электромагнетизма формулируются в пространственных переменных Эйлера, но при изучении движения материальных сред с учетом электромагнитных эффектов, целесообразно иметь систему уравнений электромагнитоупругости, записанную в материальных переменных [1, 3] и др.

В электормагнитоупругости сопутствующее упругим волнам электромагнитное поле описывается уравнениями электромагнитостатики, тем самым пренебрегая малыми количественными поправками порядка $v^2_{\text{тер}}/c^2$ (c—скорость света в среде). Тогда наряду с уравнениями движения среды (1.7) решаются уравнения электромагнитостатики

$$\varepsilon_{ipm} \mathcal{H}_{m,p}=0, \quad \mathcal{B}_{p,p}=0, \quad \varepsilon_{ipm} \mathcal{E}_{m,p}=0, \quad \mathcal{D}_{p,p}=0 \tag{2.1}$$

Введенные здесь новые искомые величины

$$\mathcal{H}_m = H_i \xi_{i,m}, \quad \mathcal{E}_m = E_i \xi_{i,m}, \quad \mathcal{B}_p = J \frac{\partial x_p}{\partial \xi_l} B_l, \quad \mathcal{D}_p = J \frac{\partial x_p}{\partial \xi_n} D_n \tag{2.2}$$

представляют собой лагранжевые напряженности и индукции магнитного и электрического полей деформируемой среды соответственно. Очевидно, что с учетом деформируемости среды электрическое и магнитное поля связываются посредством градиента деформации $\xi_{l,n}$.

К уравнениям электромагнетизма (2.1) необходимо присоединить также граничные условия, налагаемые на электромагнитное поле. На деформированной, незаряженной границе раздела двух сред нормальные составляющие индукции магнитного и электрического полей, а также тангенциальные слагающие векторов напряженностей электрического и магнитного полей остаются непрерывными. В лагранжевых координатах эти условия запишутся в виде

$$\varepsilon_{ijk} N_j [\mathcal{E}_k^{(1)} - \mathcal{E}_k^{(2)}] = 0, \quad N_j [\mathcal{D}_j^{(1)} - \mathcal{D}_j^{(2)}] = 0 \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{ijk} N_j [\mathcal{H}_k^{(1)} - H_k^{(2)}] = 0, \quad N_j [\mathcal{B}_j^{(1)} - \mathcal{B}_j^{(2)}] = 0 \tag{2.4}$$

Часто вместо условий сопряженности электрического поля (2.3) в теории электроупругости пользуются граничными условиями для электрически «закрытой» или электрически «открытой» границ. Если на поверхности пьезодиэлектрика нанесен тонкий металлический электрод и заземлен (электрический экран), то на поверхности раздела условия (2.3) заменяются условием электрически «закрытой» границы

$$\Phi^{(2)}|_s = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{E}_k = -\partial \Phi^{(2)} / \partial x_k \tag{2.5}$$

Когда диэлектрическая проницаемость внешней среды намного меньше диэлектрической проницаемости рассматриваемого диэлектрика (этот случай соответствует предельно малому отношению $\varepsilon_{ij}^{(2)} / \varepsilon_{mn}^{(1)} \ll 1$) условия (2.3) заменяются приближенным равенством

$$N_j \mathcal{D}_j^{(1)} = 0 \tag{2.6}$$

на поверхности раздела двух сред.

Наряду с тензором напряжения Лагранжа (Пиола-Кирхгофа) $\hat{L}$ часто вводится тензор обобщенных напряжений σ^* [6], компоненты которого σ^*_{ij} связаны с лагранжевыми напряжениями формулами

$$\sigma^*_{ij} = L_{jm} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} \tag{2.7}$$

Если по аналогии введем понятия обобщенной индукции электрического поля D^*_k и обобщенной индукции магнитного поля B^*_n

$$D^*_k = \mathcal{D}_j \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}, \quad B^*_n = \mathcal{B}_j \frac{\partial x_n}{\partial \xi_j} \tag{2.8}$$

то уравнения и граничные условия электромагнитоупругости пьезодиэлектрической среды запишутся в форме

$$[\sigma^*_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})]_{,j} = \rho_0 \ddot{u}_k, \qquad N_k [\sigma^*_{ij} \cdot \xi_{k,j}] = 0 \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_{ipm} [H_k \xi_{k,m}]_{,p} = 0, \qquad \varepsilon_{ijm} N_j [H_k \xi_{k,m}] = 0 \tag{2.10}$$

$$[B^*_n \xi_{p,n}]_{,p} = 0, \qquad N_j [B^*_n \xi_{j,n}] = 0 \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_{ipm} [E_k \xi_{k,m}]_{,p} = 0, \qquad \varepsilon_{ipm} N_p [E_k \xi_{k,m}] = 0 \tag{2.12}$$

$$[D^*_n \xi_{p,n}]_{,p} = 0, \qquad N_j [D^*_n \xi_{j,n}] = 0 \tag{2.13}$$

Необходимо отметить, что величины τ^*_{ij} не являются напряжениями в точном смысле этого слова, так и величины D^*_k и B^*_n не являются индукциями электрического и магнитного полей соответственно. Все эти величины можно отождествлять с истинными напряжениями T_{ij} и индукциями D_k и B_n соответственно, если удлинениями и сдвигами можно пренебрегать по сравнению с единицей. Разница между величинами Ω^* и Ω проявляется только при больших деформациях.

К полученным соотношениям электромагнитоупругости необходимо добавить определяющие уравнения для термодинамических напряжений T_{ij} и электрической индукции D_m. Для магнитных характеристик материальные уравнения представляются в виде

$$B_k=\mu_{kj}H_j \tag{2.14}$$

Учитывая инвариантность формы, термодинамическую функцию Гиббса можно представить как в виде разложения по градиенту деформации $\xi_{i,j}$ и напряженности электрического поля E_m (то есть $\Psi=\Psi(\xi_{n,i};E_m)$), так и в виде разложения по истинным деформациям u_{nl} и лагранжевым электрическим напряженностям $\mathscr{E}_m=E_k\xi_{k,m}$ (то есть $\tilde{\Psi}=\tilde{\Psi}(u_{ik},\mathscr{E}_m)$). Представляя термодинамическую функцию $\tilde{\Psi}(u_{ik};\mathscr{E}_m)$ в виде ряда

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(u_{mn},\mathscr{E}_j)&=\frac{1}{2}c_{ijkl}u_{ij}u_{kl}+\frac{1}{6}c_{ijklmn}u_{ij}u_{kl}u_{mn}+\\&+\frac{1}{24}c_{ijklmnpq}u_{ij}u_{kl}u_{mn}u_{pq}-e_{mij}\mathscr{E}_m u_{ij}-\frac{1}{2}e_{mijkl}\mathscr{E}_m u_{ij}u_{kl}-\\&-\frac{1}{6}e_{mijklpq}\mathscr{E}_m u_{ij}u_{kl}u_{pq}-\frac{1}{2}\chi_{mn}\mathscr{E}_m\mathscr{E}_n-\frac{1}{6}\chi_{mnp}\mathscr{E}_m\mathscr{E}_n\mathscr{E}_p-\\&-\frac{1}{24}\chi_{mnpq}\mathscr{E}_m\mathscr{E}_n\mathscr{E}_p\mathscr{E}_q-\frac{1}{2}l_{mnij}\mathscr{E}_m\mathscr{E}_n u_{ij}-\\&-\frac{1}{4}l_{mnijpq}\mathscr{E}_m\mathscr{E}_n u_{ij}u_{pq}-\frac{1}{6}f_{mnpij}\mathscr{E}_m\mathscr{E}_n\mathscr{E}_p u_{ij}\end{aligned} \tag{2.15}$$

учитывая, что термодинамические напряжения $T_{ij}(u_{kn},\mathscr{E}_m)$ и ин-
укция электрического поля $D_i(u_{ij},\mathscr{E}_n)$ для анизотропной диэлектри-
еской среды определяются соотношениями

$$T_{ij}=\xi_{i,m}\xi_{j,n}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial u_{mn}},\quad D_i=E_i-\xi_{i,m}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\mathscr{E}_m} \tag{2.16}$$

ля напряжений Лагранжа и лагранжевой электрической индукции
аходим

$$L_{ij}=c_{ijmn}u_{m,n}+\left(\delta_{jm}c_{inkl}+\frac{1}{2}\delta_{km}c_{ijnl}+\frac{1}{2}c_{ijklmn}\right)u_{k,l}u_{m,n}+$$

$$
+\left(\frac{1}{2}\delta_{km}\delta_{pj}c_{iqnl}+\frac{1}{4}\delta_{pm}c_{ijklqn}+\frac{1}{4}\delta_{kp}c_{ijqlmn}+\frac{1}{2}\delta_{pj}c_{iqklmn}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{6}c_{ijklmnpq}\right)u_{k,l}u_{m,n}u_{p,q}+e_{mij}\Phi_{,m}-\frac{1}{2}\tilde{l}_{mnij}\Phi_{,m}\Phi_{,n}+ \tag{2.17}
$$

$$
+(e_{mijkl}+\delta_{kj}e_{mil})\Phi_{,m}u_{k,l}+\left(\frac{1}{2}e_{mijql}\delta_{kp}+\delta_{pj}e_{miqkl}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{2}e_{mijklpq}\right)\Phi_{,m}u_{k,l}u_{p,q}-\frac{1}{2}\tilde{l}_{mnijpq}\Phi_{,m}\Phi_{,n}u_{p,q}+
$$

$$
+\frac{1}{6}f_{mnpij}\Phi_{,m}\Phi_{,n}\Phi_{,p}
$$

где $\tilde{l}_{mnij}=l_{mnij}+\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}-\delta_{ij}\delta_{mn}$, $\tilde{l}_{mnijpq}=l_{mnijpq}+$

$$
+2\left[\delta_{pq}\left(\delta_{im}\delta_{nj}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{mn}\right)+\delta_{np}\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{mq}-\delta_{im}\delta_{jq}\right)+\delta_{ip}\left(\frac{1}{2}\delta_{mn}\delta_{jq}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\delta_{mq}\delta_{jn}\right)+\delta_{mp}\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{nq}-\delta_{iq}\delta_{nj}\right)\right], \quad E_m=-\Phi_{,m}
$$

$$
\mathcal{D}_m=e_{mij}u_{i,j}-\varepsilon_{mn}\Phi_{,n}+\frac{1}{2}(e_{mnj}\delta_{ik}+e_{mijkn})u_{i,j}u_{k,n}+
$$

$$
+\frac{1}{2}\chi_{mnp}\Phi_{,n}\Phi_{,p}-\tilde{l}_{mnij}\Phi_{,n}u_{i,j}+\left(\frac{1}{6}e_{mijknpq}+\right. \tag{2.18}
$$

$$
\left.+\frac{1}{2}\delta_{kp}e_{mijqn}\right)u_{i,j}u_{k,n}u_{p,q}-\frac{1}{2}(\tilde{l}_{mnpj}\delta_{iq}+\tilde{l}_{mnijpq})\Phi_{,n}u_{i,j}u_{p,q}+
$$

$$
+\frac{1}{2}f_{mnpij}\Phi_{,n}\Phi_{,p}u_{i,j}-\frac{1}{6}\chi_{mnpq}\Phi_{,n}\Phi_{,p}\Phi_{,q}
$$

При получении материальных соотношений (2.17) и (2.18) использованы разложения

$$
J=1+u_{p,p}+\frac{1}{2}(u_{m,m})^2-\frac{1}{2}u_{p,q}u_{q,p}
$$

$$
\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}\approx\delta_{jk}-\delta_{kn}u_{j,n}+\delta_{km}u_{j,n}u_{n,m} \tag{2.19}
$$

сохраняя члены с квадратичной нелинейностью. В разложении термодинамической функции (2.15) мы ограничивались слагаемыми четвертого порядка по деформациям и электрическому полю. Это позволяет в материальных уравнениях для L_{ij} и $\mathcal{D}_k$ сохранять нелинейные слагаемые до третьего порядка по $u_{i,k}$ и $\Phi_{,n}$. В разложениях тензоры c_{ijkm}, c_{ijklmn}, $c_{ijklmnpq}$ — упругие коэффициенты второго, третьего и четвертого рангов, соответственно, при постоянном электрическом поле. χ_{mn}, χ_{mnp} и χ_{mnpq} — коэффициенты тензоров диэлектрической восприимчивости второго, третьего и четвертого рангов, соответственно, а ε_{mn}, ε_{mnp} и ε_{mnpq} — коэффициенты соответствующих тензоров диэлектрической проницаемости. e_{mij} и f_{mijkl} — линейные и нелинейные пьезокоэффициенты, l_{mnij} — коэффициенты электрострикции. e_{mijkl}, $e_{mijknpq}$ и l_{mnpqij} — соответственно, электроупругие коэффициенты третьего порядка, нечетные и четные электроупругие постоянные четвертого порядка.

Если диэлектрическая среда обладает центром инверсии (изотропная среда), то кубичная нелинейность является нелинейностью наинизшего порядка для такой среды [9]. Для такой среды, в соотношениях (2.17) и (2.18) квадратичные нелинейности отсутствуют. В этом случае число возможных нелинейных процессов больше, чем в случае среды с квадратичной нелинейностью. Квадратичной нелинейностью обладают среды без центра инверсии (анизотропные среды). Диэлектрики обладающие пьезоэлектрическим эффектом, являются существенно анизотропными материалами, не имеющие центра инверсии.

3. В граничных условиях (1.8), (2.3) и (2.4) фигурирует электромагнитоупругое поле, определяемое во внешней среде. В случае материальной внешней среды задача электромагнитоупругости решается в материальных переменных x_m, определяя замену переменных от $\xi_k^{(2)}$ к $x_n (k, n=1, 2, 3)$ аналогично закону движения (1.1). При этом условия контакта на границе раздела материальных сред $u_k^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t) = u_k^{(2)}(x_1, x_2, x_3, t)$ обеспечивает отображение точек деформированной границы на недеформированную точно так же, как при отображении (1.1).

Известно, что для нематериальной (вакуумной) неограниченной среды между начальным и текущим состояниями отсутствует закон соответствия типа (1.1). Тогда задачу электромагнетизма в принципе можно сформулировать только в пространственных переменных Эйлера ξ_k. Но когда решается задача электомагнитоупругости ограниченной материальной среды, граничащей с вакуумной областью, необходимо учесть, что с деформированием электромагнитоупругой среды «деформируется» также вакуумная область. Следовательно, ввиду того, что внутренняя задача электромагнитоупругости сформулирована в материальных переменных x_m, тут также необходимо переходить к лагранжевым переменным. При этом проблема выбора закона отображения от пространственных переменных к материальным, разрешается следующим образом:

Деформированная поверхность электромагнитоупругой среды становится координатной поверхностью и в качестве «упругого перемещения» в каждой точке вакуумной области можем брать перемещение соответствующей точки границы электромагнитоупругой среды $u_j^{(e)}(x_1, x_2, x_3, t) = u_j^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t)/_S$. Закон „движения" для нематериальной среды запишется в следующем виде:

$$\xi_j^{(e)}(x_1, x_2, x_3, t) = u_j^{(e)}(x_1, x_2, x_3, t) + x_j, \quad j=1, 2, 3. \tag{3.1}$$

Из вышеприведенного следует, что для вакуумной области уравнения и граничные условия электромагнетизма сохраняют свой вид.

$$\epsilon_{tmp}\mathcal{H}^{(e)}_{m,p}=0,\quad \mathcal{B}^{(e)}_{p,p}=0,\quad \epsilon_{tpm}\mathcal{E}^{(e)}_{m,p}=0,\quad \mathcal{D}^{(e)}_{p,p}=0 \qquad (3.2)$$

где

$$\mathcal{H}^{(e)}_m=H^{(e)}_i\xi^{(e)}_{i,m},\quad \mathcal{E}^{(e)}_m=E^{(e)}_i\xi^{(e)}_{i,m},\quad \mathcal{B}^{(e)}_p=J^{(e)}\frac{\partial x_p}{\partial\xi^{(e)}_i}B^{(e)}_i,\quad \mathcal{D}^{(e)}_p=J^{(e)}\frac{\partial x_p}{\partial\xi^{(e)}_i}D^{(e)}_i \qquad (3.3)$$

Градиент деформации $\xi^{(e)}_{i,k}$ в этих соотношениях определяется по закону отображения (3.1). В механических граничных условиях (1.8) термодинамические напряжения $T^{(e)}_{ij}$ заменяются напряжениями Максвелла $t^{(e)}_{ij}$ для вакуумной среды ($\tau^{(e)}_{ij}=0$).

Введя обобщенный электрический потенциал $\mathcal{E}^{(e)}_m=-\Phi^{(e)}_{,m}$, для индукции электрического поля получим

$$\mathcal{D}^{(e)}_p=-\varepsilon_0 J^{(e)}\frac{\partial x_p}{\partial\xi^{(e)}_i}\frac{\partial x_m}{\partial\xi^{(e)}_i}\Phi^{(e)}_{,m} \qquad (3.4)$$

с учетом зависимости $D^{(e)}_k=\varepsilon_0E^{(e)}_k$. Пользуясь разложениями (2.19), для внешней вакуумной области получаем материальные соотношения лагранжевой индукции электрического поля

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(e)}_p=-\varepsilon_0[\Phi^{(e)}_{,p}-(u^{(e)}_{m,p}+u^{(e)}_{p,m})\Phi^{(e)}_{,m}-(u^{(e)}_{m,l}u^{(e)}_{l,p}+u^{(e)}_{p,l}u^{(e)}_{l,m}-\\ -u^{(e)}_{p,l}u^{(e)}_{m,l})\Phi^{(e)}_{,m}+u^{(e)}_{n,n}\Phi^{(e)}_{,p}-(u^{(e)}_{m,p}+u^{(e)}_{p,m})u^{(e)}_{n,n}\Phi^{(e)}_{,m}+\\ +\frac{1}{2}(u^{(e)}_{l,l})^2\Phi^{(e)}_{,p}-\frac{1}{2}u^{(e)}_{n,j}u^{(e)}_{j,n}\Phi^{(e)}_{,p}\end{aligned} \qquad (3.5)$$

С введением «обобщенных» электрических потенциалов Φ и $\Phi^{(e)}$ для внутренней и внешней задач электромагнетизма соответственно, необходимо граничные условия также записать через потенциалы. Условия сопряженности тангенциальной компоненты электрического поля преобразуются к виду

$$\Phi=\Phi^{(e)} \qquad (3.6)$$

4. Необходимо обращать внимание на то, что нелинейность проникает в теорию электроупругости по трем путям: а) через тензор деформации Лагранжа $\{u_{ik}\}$, б) через уравнения движения электроупругой сплошной среды и уравнения электромагнетизма, в) через материальные соотношения термодинамических напряжений $T_{ij}=\tau_{ij}+t_{ij}$ и электрической индукции D_k. При этом в первых двух из перечисленных совокупностей формул учет нелинейных членов обусловливается геометрическими соображениями. В третьей совокупности формул нелинейные члены появляются, если деформации и напряженность электрического поля превосходят по величине некоторые характерные для рассматриваемого материала физические константы (пределы пропорциональности). Поэтому при рассмотрении нелинейных задач принято говорить о нелинейностях двух типов—геометри-

ческой и физической. Эти нелинейности связаны друг с другом и в иерархии нелинейностей геометрическая нелинейность занимает более высокую ступень. Но, исходя из физико-механических соображений, их иногда можно считать несвязанными друг с другом. Отсюда в нелинейной теории электромагнитоупругости кроме общего случая нелинейности могут рассматриваться нелинейные задачи двух типов:

— в физически нелинейной, геометрически линейной задаче следует пользоваться линейными уравнениями и граничными условиями электромагнитоупругости

$$T_{ik,k}=\rho_0\ddot{u}_i,\quad D_{k,k}=0,\quad \varepsilon_{ijk}E_{j,k}=0 \tag{4.1}$$

$$N_j[T_{ij}]=0,\quad N_j[D_j]=0,\quad \varepsilon_{ijk}N_j[E_k]=0 \tag{4.2}$$

с учетом нелинейных материальных соотношений для термоупругих напряжений T_{ij} и индукции электрического поля D_m:

$$\begin{aligned}T_{ij}={}&c_{ijmn}u_{m,n}+\frac{1}{2}c_{ijklmn}u_{k,l}u_{m,n}+\frac{1}{6}c_{ijklmnpq}u_{k,l}u_{m,n}u_{p,q}+\\&+e_{mij}\Phi_{,m}-l_{mnij}\Phi_{,m}\Phi_{,n}+e_{mijkl}\Phi_{,m}u_{k,l}+\frac{1}{6}f_{mnpij}\Phi_{,m}\Phi_{,n}\Phi_{,p}+\\&+\frac{1}{2}e_{mijklpq}\Phi_{,m}u_{k,l}u_{p,q}-\frac{1}{2}l_{mnijpq}\Phi_{,m}\Phi_{,n}u_{p,q}\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}D_m={}&e_{mij}u_{i,j}-\varepsilon_{mn}\Phi_{,n}+\frac{1}{2}e_{mijkl}u_{i,j}u_{k,l}+\frac{1}{2}\chi_{mnp}\Phi_{,n}\Phi_{,p}-\\&-l_{mnij}\Phi_{,n}u_{i,j}+\frac{1}{6}e_{mijklpq}u_{i,j}u_{k,l}u_{p,q}-\frac{1}{2}l_{mnijpq}\Phi_{,n}u_{i,j}u_{p,q}+\\&+\frac{1}{2}f_{mnpij}\Phi_{,n}\Phi_{,p}u_{i,j}-\frac{1}{6}\chi_{mnpq}\Phi_{,n}\Phi_{,p}\Phi_{,q}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь компоненты тензора деформации u_{ij} определяются формулами $u_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$, а потенциал электрического поля — $E_n=-\Phi_{,n}$;

— в физически линейной, геометрически нелинейной задаче электроупругости следует пользоаться линейными материальными соотношениями для термодинамических напряжений T_{ij} и индукции электрического поля D_i:

$$T_{ij}=c_{ijmn}u_{mn}+e_{mij}E_m,\quad D_k=e_{kij}u_{ij}-\varepsilon_{km}E_m \tag{4.5}$$

В этом случае уравнения и граничные условия электромагнитоупругости сохраняют вид

$$L_{ij,j}=\rho_0\ddot{u}_i,\quad \mathscr{D}_{k,k}=0,\quad \varepsilon_{ijk}\mathscr{E}_{j,k}=0 \tag{4.6}$$

$$N_j[L_{ij}]=0,\quad N_j[\mathscr{D}_j]=0,\quad \varepsilon_{ijk}N_j[\mathscr{E}_k]=0 \tag{4.7}$$

При этом выражения для лагранжевых напряжений L_{ij} и электрической индукции $\mathcal{D}_m$ получаются из (2.17) и (2.18) соответственно, положив в них

$$c_{ijklmn}=0, \quad c_{ijklmnpq}=0, \quad l_{mnij}=0, \quad e_{mijkl}=0$$

$$e_{mijklpq}=0, \quad l_{mnijpq}=0, \quad f_{mnpij}=0, \quad \chi_{mnp}=0, \quad \chi_{mnpq}=0 \tag{4.8}$$

Вообще геометрическая и физическая нелинейности в теории электромагнитоупругости взаимосвязаны и при рассмотрении конкретных задач пренебрежение одной из этих нелинейностей при сохранении другой, должно быть физически обосновано [10].

ABOUT MAIN EQUATIONS OF NONLINEAR ELECTROELASTISITY OF PIEZOELECTRIC DIELECTRIC

A. S. AVETISYAN

ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԻԿ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿՆԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Ստացված են ոչ գծային ալիքային հավասարումները և պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության համար եզրային պայմանները՝ անկախ միջավայրի երկրաչափական և ֆիզիկական ոչ գծայնությունների հաշվառմամբ։ Հաշվի առնելով, որ էլեկտրաստատիկ միջավայրի եզրի ձևափոխմամբ, ձևափոխված է նաև ոչ նյութական (վակուում) կիսատարածությունը, ներմուծվել է արտաքին միջավայրի ընթացիկ վիճակը նախնական չձևափոխված վիճակին արտապատկերող ֆունկցիա։ Ստացված են երկրաչափական կամ ֆիզիկական ոչ գծայնությունների դեպքում ալիքային հավասարումները և եզրային պայմանները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г.* Механика связанных полей в элементах конструкций: т. 3. Акустоэлектромагнитоупругость.— Киев: Наук. думка, 1988. 288 с.
2. *Maugin G. A.* Nonlinear electromechanical effects and applications. — Singapore: World Sci. Publ., 1985, 168 p.
3. *Toupin R. A.* A dinamical theory of dielectrics. — Int. J. Eng. Sci., 1963, vol. 1, pp. 101–126.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1982. 620 с.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.—М.: Наука, 1966. 624 с.
6. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости.—М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940 с.

8. *Красильников В. А., Крылов В. В.* Введение в физическую акустику.—М.: Наука, 1984. 400 с.
9. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн.—М.: Наука, 1979. 383 с.
10. *Победря Б. Е.* О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, т. *40*, с. 15—26.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
18. V. 1989