ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 4, 1990 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕНА БЕСКОНЕЧНАЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ НАКЛАДКА

ГРИГОРЯН Э. Х.

В работе рассматривается задача для упругой полуплоскости, на границе которой приклеена кусочно-однородная бесконечная накладка, состоящая из двух полубесконечных кусков. Полуплоскость деформируется под действием сил, приложенных к накладке. Полагается, что слой клея находится в условиях чистого сдвига, а накладка — в одноосном напряженном состоянии. Задача с помощью преобразования Фурье сводится к решению функционального уравнения на действительной оси относительно трансформантов Фурье контактных касательных напряжений, соответствующих разным частям накладки. Строится замкнутое решение этого функционального уравнения, а потом определяются асимптотические формулы для контактных напряжений. Помимо этого, указывается и другой путь решения задачи, заключающийся в том, что задача сводится к решению фредгольмовских интегральных уравнений второго рода, которые можно решать методом последовательных приближений.

Отметим, что эта задача при отсутствии слоя клея была рассмотрена в [1].

Пусть упругая полуплоскость усилена на своей границе кусочно-однородной бесконечной накладкой, состоящей из двух полубесконечных кусков с модулями упругости E ($x>0$) и E_1 ($x<0$). Считается, что накладка приклеена к полуплоскости и к ней приемлема гипотеза об одномерном континууме, то есть под действием горизонтальных сил она находится в одноосном напряженном состоянии [2]. Полуплоскость деформируется под действием сил, приложенных к накладке. Полагая, что слой клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь [3]

$$u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x, 0) = \frac{h}{G}\tau(x) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1}$$

где $u^{(1)}(x)$ — перемещения точек накладки, $u^{(2)}(x, 0)$ — перемещения граничных точек упругой полуплоскости, h — толщина слоя, G — модуль сдвига материала клея, $\tau(x)$ — интенсивность касательных контактных напряжений.

С другой стороны, в силу вышеуказанного, уравнения равновесия кусочно-однородной накладки запишутся в виде

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\tau^+(x)}{E_1H} + \frac{\tau^-(x)}{E_2H} - \frac{Q}{E_2H}\delta(x+a) - \frac{P}{E_1H}\delta(x-b) - u_0\delta(x) \qquad (2)$$

где

$$\tau^+(x)=\Theta(x)\tau(x), \quad \tau^-(x)=\Theta(-x)\tau(x)$$

$$U(x)=\Theta(x)\frac{du^{(1)}}{dx}+\Theta(-x)\frac{du^{(1)}}{dx}, \quad u_0=\left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=-0}-\left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=+0}$$

H—толщина накладки, $\Theta(x)$—функция Хевисайда, $\delta(x)$ — функция Дирака; P, Q—интенсивности сосредоточенных сил, приложенных к накладке.

Далее для $du^{(2)}/dx$ имеем

$$\frac{du_2}{dx}(x,0)=\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(s)\,ds}{s-x}, \quad A=\frac{E}{2(1-\nu^2)} \quad (-\infty<x<\infty) \qquad (3)$$

где E—модуль упругости материала полуплоскости, а ν коэффициент Пуассона.

Теперь, применяя к (1), (2) и (3) обобщенное преобразование Фурье и сопоставляя полученные выражения для определения $\bar{\tau}^+(\alpha)$ и $\bar{\tau}^-(\alpha)$, получим следующее функциональное уравнение:

$$(\alpha^2+2\beta|\alpha|+\gamma_1^2)\bar{\tau}^+(\alpha)+(\alpha^2+2\beta|\alpha|+\gamma_2^2)\bar{\tau}^-(\alpha)=\bar{f}_1(\alpha) \qquad (4)$$

$$(-\infty<\alpha<\infty)$$

где

$$\bar{\tau}^+(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^+(x)\exp(i\alpha x)dx, \quad \bar{\tau}^-(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^-(x)\exp(i\alpha x)dx$$

$$\bar{f}_1(\alpha)=\frac{G}{h}u_0+\frac{GP}{E_1Hh}\exp(i\alpha b)+\frac{GQ}{E_2Hh}\exp(-i\alpha a), \quad (-\infty<\alpha<\infty)$$

$$\beta=\frac{G}{2Ah}, \quad \gamma_1^2=\frac{G}{E_1hH}, \quad \gamma_2^2=\frac{G}{E_2Hh}$$

Функциональное уравнение преобразуем к следующему виду:

$$\Pi(\alpha)\bar{\tau}^+(\alpha)+\bar{\tau}^-(\alpha)=\bar{f}(\alpha) \quad (-\infty<\alpha<\infty) \qquad (5)$$

Здесь

$$\Pi(\alpha)=\frac{\alpha^2+2\beta|\alpha|+\gamma_1^2}{\alpha^2+2\beta|\alpha|+\gamma_2^2}=\frac{(|\alpha|+a_1)(|\alpha|+a_2)}{(|\alpha|+a_3)(|\alpha|+a_4)}$$

$$\bar{f}(\alpha)=\frac{\bar{f}_1(\alpha)}{\alpha^2+2\beta|\alpha|+\gamma_2^2}=\frac{\bar{f}_1(\alpha)}{(|\alpha|+a_3)(|\alpha|+a_4)}$$

$$a_1=\frac{\gamma_1^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\gamma_1^2}}, \quad a_2=\frac{\gamma_1^2}{\beta-\sqrt{\beta^2-\gamma_1^2}}, \quad a_3=\frac{\gamma_2^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\gamma_2^2}}, \quad a_4=\frac{\gamma_2^2}{\beta-\sqrt{\beta^2-\gamma_2^2}}$$

Функциональное уравнение (5) можно решать, рассматривая его как краевую задачу Римана в теории аналитических функций, так как $\overline{\tau}^{+}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{-}(\sigma)$ представляют собой граничные значения аналитических функций $\overline{\tau}^{+}(\alpha)$, $\overline{\tau}^{-}(\alpha)$ $(\alpha=\sigma+it)$, регулярных соответственно при $t>0$ и $t<0$.

Здесь же это уравнение решается следующим образом [1], [4]. Функцию $\overline{\Pi}(\sigma)$ представим в виде

$$\overline{\Pi}(\sigma)=\frac{1+\overline{K}^{-}(\sigma)}{1+\overline{K}^{+}(\sigma)} \qquad (6)$$

Ввиду того, что $\overline{\Pi}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$, получим

$$\overline{K}^{+}(\sigma)=\exp\overline{R}^{+}(\sigma)-1, \quad \overline{K}^{-}(\sigma)=\exp(-\overline{R}^{-}(\sigma))-1$$

$$\ln\frac{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}=\overline{R}^{+}(\sigma)+\overline{R}^{-}(\sigma), \quad R(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\overline{\Pi}(\sigma)\exp(-i\sigma x)d\sigma$$

Очевидно, что $\overline{K}^{\pm}(\sigma)\to 0$ при $|\sigma|\to\infty$.

Далее, имея в виду (6) известным способом, получим

$$\overline{L}_1^{+}(\sigma)=(1+\overline{K}^{+}(\sigma))\overline{\tau}^{+}(\sigma)-\overline{\varphi}^{+}(\sigma)=\overline{\varphi}^{-}(\sigma)-(1+\overline{K}^{-}(\sigma))\overline{\tau}^{-}(\sigma)=\overline{L}_2^{-}(\sigma) \qquad (7)$$

где

$$\overline{\tau}^{+}(\sigma)=\int_0^{\infty}\tau(x)\exp(i\sigma x)dx, \quad \overline{\tau}^{-}(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}\tau(x)\exp(i\sigma x)dx$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\overline{K}^{-}(\sigma))\overline{f}(\sigma)\exp(-i\sigma x)d\sigma$$

Из (7) следует, что

$$L_1^{+}(x)=L_2^{-}(x) \quad (-\infty<x<\infty)$$

Но это равенство может иметь место только при [5]

$$L_1^{+}(x)=L_2^{-}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}(x)$$

Следовательно, из (7) получим

$$\overline{L}_1^{+}(\sigma)=\overline{L}_2^{-}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}(-i\sigma)^k a_k$$

Но так как $\overline{L}_1^{+}(\sigma)\to 0$, $\overline{L}_2^{-}(\sigma)\to 0$, при $|\sigma|\to\infty$, то

$$\overline{L}_1^{+}(\sigma)=\overline{L}_2^{-}(\sigma)=0 \quad (-\infty<\sigma<\infty) \qquad (8)$$

Тогда из (8) будем иметь

$$\overline{\tau}^{\pm}(\sigma)=\frac{\overline{\varphi}^{\pm}(\sigma)}{1+\overline{K}^{\pm}(\sigma)} \qquad (9)$$

Выше имелось в виду, что если $\bar A^+(\sigma)\bar B^+(\sigma)=\bar C_1(\sigma)$, $\bar A^-(\sigma)\bar B^-(\sigma)=$ $=\bar C_1(\sigma)$, то $\bar C_1(\sigma)=\bar C_1^+(\sigma)$, $\bar C_2(\sigma)=\bar C_2^-(\sigma)$.

Таким образом, интенсивности тангенциальных контактных напряжений $\tau^\pm(x)$ определились в замкнутом виде. Теперь приступим к определению асимптотических формул для $\tau^\pm(x)$ при $|x|\to\infty$. Для этого, следуя Лайтхиллу [6], рассмотрим разложения $\bar\tau^\pm(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$. Сначала исследуем следующий интеграл:

$$\bar L^\pm(\sigma)=\int_0^\infty L(u)\exp(\pm i\sigma u)du,\quad L(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{d}{|\sigma|}\right)\exp(-i\sigma u)d\sigma$$

где постоянная d может быть и комплексной. Не останавливаясь на подробностях, отметим, что $d\bar L^\pm(\sigma)/d\sigma$ можно привести к виду

$$\frac{d\bar L^\pm(\sigma)}{d\sigma}=\mp\frac{i}{\pi d}\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}\frac{dt}{t\mp i\frac{\sigma\pm i0}{d}}-\frac{1}{2(\sigma\pm i0)}$$

где

$$\lim_{t\to+0}(\sigma\pm it)^{-1}=(\sigma\pm i0)^{-1}=\frac{1}{\sigma}\mp i\pi\delta(\sigma),\quad \lim_{t\to+0}(\sigma\pm it)=\sigma\pm i0=\sigma$$

Тогда, поскольку [7]

$$\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}\frac{dt}{t\mp i\frac{\sigma\pm i0}{d}}=\frac{\pm i\frac{\pi}{2}\mp i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma\pm i0}{d}-\ln\frac{\sigma\pm i0}{d}}{1-\left(\frac{\sigma\pm i0}{d}\right)^2}$$

где $\lim\limits_{t\to+0}\ln(\sigma\pm it)=\ln(\sigma\pm i0)=\ln|\sigma|\pm i\pi H(-\sigma)$

то для $d\bar L^\pm(\sigma)/d\sigma$ получим следующее выражение:

$$\frac{d\bar L^\pm(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{1}{2d}\frac{\frac{\sigma\pm i0}{d}-1\pm\frac{2i}{\pi}\ln\frac{\sigma\pm i0}{d}}{1-\left(\frac{\sigma\pm i0}{d}\right)^2}-\frac{(\sigma\pm i0)^{-1}}{2}\qquad(10)$$

Далее, поскольку

$$\left(\frac{1}{|\sigma|+d}\right)^\pm=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-isx)ds}{|s|+d}\exp(\pm i\sigma x)dx$$

можно привести к виду

$$\left(\frac{1}{|\sigma|+d}\right)^\pm=\frac{1}{\pi d}\int_0^\infty\frac{t}{1+t^2}\frac{dt}{t\mp i\frac{\sigma\pm i0}{d}}$$

то

$$\left(\frac{1}{|\sigma|+d}\right)^{\pm}=\frac{1}{2d}\pm\frac{i(\sigma\pm i0)}{\pi d^2}\,\frac{\pm\frac{i\pi}{2}\mp\frac{i\pi}{2}\frac{\sigma\pm i0}{d}-\ln\frac{\sigma\pm i0}{d}}{1-\left(\frac{\sigma\pm i0}{d}\right)^2} \tag{11}$$

Имея в виду (10), получим

$$\frac{dR^{\pm}(\sigma)}{d\sigma}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\,\frac{\frac{\sigma\pm i0}{a_k}-1\pm\frac{2i}{\pi}\ln\frac{\sigma\pm i0}{a_k}}{1-\left(\frac{\sigma\pm i0}{a_k}\right)^2} \tag{12}$$

Тогда из (12) получим

$$\overline{R}^{\pm}(\sigma)=\ln\sqrt{\frac{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}}\pm\frac{i}{\pi}\int_0^{\sigma}\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\frac{\ln\frac{|\sigma|}{a_k}\,d\sigma}{a_k\left(1-\left(\frac{\sigma}{a_k}\right)^2\right)}$$

которые справедливы и при комплексных a_k. Следовательно,

$$\exp(-\overline{R}^{\pm}(\sigma))=\sqrt{\frac{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}}\exp\left\{\pm\frac{i}{\pi}\int_0^{\sigma}\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\frac{\ln\frac{|\sigma|}{a_k}\,d\sigma}{a_k\left(1-\left(\frac{\sigma}{a_k}\right)^2\right)}\right\}$$

В случае вещественных a_k будем иметь

$$\exp(-\overline{R}^{\pm}(\sigma))=\sqrt{\frac{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}}\exp\left\{\pm\frac{i}{\pi}\left[\int_{\frac{\sigma}{a_1}}^{\frac{\sigma}{a_3}}+\int_{\frac{\sigma}{a_2}}^{\frac{\sigma}{a_4}}\right]\frac{\ln|s|}{1-s^2}\,ds\right\}$$

Отметим, что разложения $\overline{R}^{\pm}(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$ легко получить, если использовать (12). Имея в виду вышесказанное, при $|\sigma|\to 0$ получим

$$\exp(-\overline{R}^{+}(\sigma))=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{2\lambda_2\beta}{\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\frac{i\sigma}{\pi}\left(-\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma+i0)\right)+$$

$$+\frac{2\lambda_2\beta}{\lambda_1\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\sigma^2\left(-\frac{i\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+\ln(\sigma+i0)\right)-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{\beta^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)^2\sigma^2\left(-\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma+i0)\right)^2-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\ln a_4}{a_4}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\frac{i\sigma}{\pi}+\mathrm{const}\,\sigma^2+0(\sigma^3\ln(\sigma+i0))$$

$$\exp(-\overline{R}^{-}(\sigma))=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\beta\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\frac{i\sigma}{\pi}\left(\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)+$$

$$+\frac{2\lambda_2\beta}{\lambda_1\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\sigma^2\left(\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\beta^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)^2\sigma^2\left(\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)^2+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\frac{i\sigma}{\pi}+\mathrm{const}\cdot\sigma^2+O(\sigma^3\ln(\sigma-i0)) \tag{13}$$

$$\exp\bar{R}^-(\sigma)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{2\lambda_1\beta}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\frac{i\sigma}{\pi}\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)+$$

$$+\frac{2\lambda_1\beta}{\lambda_2\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\times$$

$$\times\sigma^2\left(\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)-\frac{2\lambda_1\beta^2}{\lambda_2\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)^2\sigma^2\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)^2-$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\frac{i\sigma}{\pi}+$$

$$+\mathrm{const}\cdot\sigma^2+O(\sigma^3\ln(\sigma-i0))$$

Теперь приступим к определению разложений функций $\bar\varphi^\pm(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$. Для этого представим $\bar\varphi^+(\sigma)$ в виде

$$\bar\varphi^+(\sigma)=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp(-\bar R^-(s))-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]\bar f(s)\exp(-isx)ds\exp(i\sigma x)dx+$$

$$+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\int_0^\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar f(s)\exp(-isx)ds\exp(i\sigma x)dx$$

Тогда, имея в виду (11) и (13), получим

$$\bar\varphi^+(\sigma)=\bar\varphi^+(0)+\frac{i\sigma}{2\lambda_1\lambda_2}\left[\Gamma+\frac{B}{\pi}\left(\frac{2\beta}{\lambda_1^2}\psi(1)-\frac{2\beta}{\lambda_2^2}\psi(1)+\frac{\ln a_4}{a_4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}+\frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}\left(\frac{\ln a_3}{a_3^2}-\frac{\ln a_4}{a_4^2}\right)\right]+ \tag{14}$$

$$+\frac{2\beta B}{\lambda_1\lambda_2^2}\frac{i\sigma}{\pi}\left(i\frac{\pi}{2}+\psi(2)-\ln(\sigma+i0)\right)+O(\sigma^2\ln(\sigma+i0))$$

Поступая аналогичным образом для $\bar\varphi^-(\sigma)$, будем иметь

$$\bar\varphi^-(\sigma)=\bar\varphi^-(0)+\frac{i\sigma}{2\lambda_1\lambda_2}\left[\Gamma+\frac{B}{\pi}\left(\frac{2\beta}{\lambda_1^2}\psi(1)-\frac{2\beta}{\lambda_2^2}\psi(1)+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}\right.\right.$$

$$
-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}-\frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}\left(\frac{\ln a_3}{a_3^2}-\frac{\ln a_4}{a_4^2}\right)\Bigg)\Bigg|+\frac{2\beta B i\sigma}{\lambda_2^2\,\pi}\left(i\frac{\pi}{2}-\right. \tag{15}
$$

$$
\left.-\psi(2)-\ln(\sigma-i0)\right)+O(\sigma^2\ln(\sigma-i0))
$$

Здесь $\psi(z)$ — известная функция Пси,

$$
\Gamma=\lambda_1^2 bP-\lambda_2^2 aQ,\quad B=\frac{G}{h}u_0^1+\lambda_1^2P-\lambda_2^2Q
$$

$$
\bar\varphi^+(0)=\frac{P+Q-\dfrac{B}{\lambda_2^2}}{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}},\quad \bar\varphi^-(0)=\frac{P+Q-\dfrac{B}{\lambda_1^2}}{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}
$$

Используя (14), (15) и (13), для $\bar\varphi(\sigma)$ получим

$$
\bar\varphi(\sigma)=\bar\varphi^+(\sigma)+\bar\varphi^-(\sigma)-\frac{2B\beta^2}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)^2\frac{\sigma^2}{\pi^2}\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)^2+
$$

$$
+\frac{2\beta}{\pi\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left(\Gamma+\frac{B}{\pi}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\right)\times \tag{16}
$$

$$
\times\sigma^2\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)-\frac{2\beta}{\lambda_1\lambda_2^3}\left(\Gamma+\frac{B}{\pi}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\right)i\sigma|\sigma|+\frac{4B\beta^2}{\pi\lambda_1\lambda_2^3}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)i\sigma|\sigma|\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)+
$$

$$
+\mathrm{const}\,\sigma^2+O(\sigma^3\ln|\sigma|)\quad \text{при } |\sigma|\to 0
$$

Подставляя разложения (13) — (16) в (9) и проводя обратное преобразование Фурье, получим следующие асимптотические формулы:

$$
\tau^+(x)=\frac{2\beta}{\pi}\bar\varphi(0)(\lambda_1x_+)^{-3}+\frac{4\lambda_1\beta}{\pi^2}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}\right)\left(\Gamma+\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{B}{\pi}\left(\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\right)+\frac{\pi}{\lambda_2^2}\left(\Gamma+\frac{2B\beta}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\right)+
$$

$$
+\frac{B}{2}\left(1-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\Bigg|\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}\left(\frac{\ln a_3}{a_3^2}-\frac{\ln a_4}{a_4^2}\right)-\frac{2\beta}{\lambda_2^2}\left(\frac{\psi(1)}{\lambda_1^2}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{3+\psi(1)+4\ln\lambda_1}{\lambda_2^2}\right)\Bigg|-\bar\varphi(0)\Bigg|2\beta(\psi(1)-\ln\lambda_1)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_2^2}\right)+\frac{\ln a_4}{a_4}+
$$

$$
\left.+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\Bigg|\right](\lambda_1x_+)^{-3}+\frac{8\lambda_1\beta^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\Bigg[\bar\varphi(0)+
$$

$$
\left.+\frac{B}{\lambda_2^2}\right](\lambda_1x_+)^{-3}\ln(\lambda_1x_+)+O(x_+^{-3}\ln^2x_+)\quad\text{при } |x|\to\infty
$$

$$\tau^-(x) = \frac{2\beta}{\pi}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\bar{\tau}(0)(\lambda_1 x_-)^{-2} - \frac{4\beta\lambda_1^3}{\pi^2\lambda_2^2}\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}\right)\left(\Gamma + \right.\right.$$

$$+\frac{B}{\pi}\left(\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\Bigg) + \frac{\pi}{\lambda_1^2}\left(\Gamma + \frac{2\beta B}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\right) +$$

$$+\frac{B}{2}\left(1-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}\left(\frac{\ln a_3}{a_3^2}-\frac{\ln a_4}{a_4^2}\right)-\frac{2\beta}{\lambda_2^2}\left(\frac{\psi(1)+2}{\lambda_1^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi(2)+4\ln\lambda_1}{\lambda_2^2}\right)\right]-\bar{\tau}(0)\left[2\beta(\psi(1)-\ln\lambda_1)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_2^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right]\right\}(\lambda_1 x_-)^{-3} -$$

$$-\frac{8\beta^2\lambda_1^3}{\pi^2\lambda_2^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left[\bar{\tau}(0)+\frac{B}{\lambda_1^2}\right](\lambda_1 x_-)^{-3}\ln(\lambda_1 x)_- +$$

$$+O(x_-^{-4}\ln^2 x_-) \quad \text{при} \quad |x|\to\infty$$

где

$$x_+ = \Theta(x)x, \quad x_- = \Theta(-x)|x|$$

Значение функции $\tau(x)$ в точке $x=0$ конечно и равно

$$\tau(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\bar{K}^-(\sigma))\bar{f}(\sigma)d\sigma$$

Отметим, что при отсутствии слоя клея $\tau(x)$ в точке $x=0$ имеет логарифмическую особенность [1].

Теперь рассмотрим тот частный случай задачи, когда модуль упругости основания принимается бесконечным. В этом случае имеем

$$\bar{\tau}^+(\sigma) = \frac{iu_0^1 G}{h(\lambda_1+\lambda_2)(\sigma+i\lambda_1)} + \frac{iGQ\exp(-\lambda_2 a)}{E_2 hH(\lambda_1+\lambda_2)(\sigma+i\lambda_1)} -$$

$$-\frac{iGP}{E_1 hH(\lambda_1+\lambda_2)}\left[\frac{(\sigma+i\lambda_1)(\exp(i\sigma b)-\exp(-\lambda_1 b))}{\lambda_1^2+\sigma^2}-\frac{\exp(i\sigma b)}{\sigma+i\lambda_1}\right]$$

$$\bar{\tau}^-(\sigma) = -\frac{iu_0^1 G}{h(\lambda_1+\lambda_2)(\sigma-i\lambda_2)} - \frac{iGP\exp(-\lambda_1 b)}{E_1 hH(\lambda_1+\lambda_2)(\sigma-i\lambda_2)} -$$

$$-\frac{iGQ}{E_2 hH(\lambda_1+\lambda_2)}\left[\frac{\exp(-i\sigma a)}{\sigma-i\lambda_2}-\frac{(\sigma-i\lambda_2)(\exp(-i\sigma a)-\exp(-\lambda_2 a))}{\lambda_2^2+\sigma^2}\right]$$

Отсюда после применения обратного преобразования Фурье, получим

$$\tau^+(x) = \frac{G}{h(\lambda_1+\lambda_2)}\left\{\left[\left(u_0^1+\frac{Q\exp(-\lambda_2 a)}{E_2 H}\right)\Theta(x)+\frac{P}{2E_1 H}\left(\left(1+\right.\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Big)\exp(\gamma_1 b)\Theta(x-b)+\Big(1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Big)\exp(-\gamma_1 b)\Theta(x)\Big)\Big]\exp(-\gamma_1 x)+$$

$$+\frac{P}{2E_1H}\Big(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Big)\exp(-\gamma_1 b)(\Theta(b-x)-\Theta(-x))\exp(\gamma_1 x)\Big\}$$

$$\tau^-(x)=\frac{G}{h(\gamma_1+\gamma_2)}\Big\{\Big[\Big(u_0^1+\frac{P\exp(-\gamma_1 b)}{E_1H}\Big)\Theta(-x)+\frac{Q}{2E_2H}\Big(\Big(1+$$

$$+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Big)\exp(\gamma_2 a)\Theta(-x-a)+\Big(1-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Big)\exp(-\gamma_2 a)\Theta(-x)\Big)\Big]\exp(\gamma_2 x)+$$

$$+\frac{Q}{2E_2H}\Big(1-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Big)\exp(-\gamma_2 a)(\Theta(x+a)-\Theta(x))\exp(-\gamma_2 x)\Big\}$$

Постоянная u_0^1 определяется из условия равновесия накладки

$$\bar{\tau}(0)=P+Q$$

и в данном частном случае имеет вид

$$u_0^1=\frac{(P+Q)}{G}\gamma_1\gamma_2 h+\frac{P}{E_1H}\Big(\Big(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-1\Big)\exp(-\gamma_1 b)-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Big)+$$

$$+\frac{Q}{E_2H}\Big(\Big(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}-1\Big)\exp(-\gamma_2 a)-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Big)$$

Следует отметить, что исследуемую задачу можно свести к решению фредгольмовских интегральных уравнений второго рода, допускающих решение методом последовательных приближений. Так как выражение (9) содержит функции сложной структуры, этот метод дает возможность определять численные значения $\tau^-(x)$ сравнительно просто.

Действительно, применив к (5) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x)+(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\int_0^\infty K_1(x-s)\tau(s)ds=f_1(x)\quad(-\infty<x<\infty)\tag{17}$$

где

$$K_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\alpha x)d\alpha}{\alpha^2+2\beta|\alpha|+\gamma_2^2},\quad f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{f}_1(\alpha)\exp(-i\alpha x)d\alpha}{\alpha^2+2\beta|\alpha|+\gamma_2^2}$$

Теперь потребовав, чтобы x изменялся в интервале $0<x<\infty$, получим искомое интегральное уравнение

$$\tau(x)+(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\int_0^\infty K_1(x-s)\tau(s)ds=f_1(x)\quad(0<x<\infty)\tag{18}$$

После определения $\tau(x)$ из (18) значении $\tau(x)$ при $-\infty < x < 0$ определятся из (17).

Нетрудно видеть, что достаточное условие разрешимости интегрального уравнения (18) в пространстве суммируемых функций будет следующим:

$$|\lambda_1^2-\lambda_2^2| \int_0^{\infty} K_3(x-s)dx < 1 \tag{19}$$

поскольку

$$0 < K_{34}(x) = \frac{1}{2\pi(a_4-a_3)} \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2}(\exp(-a_3xt)-\exp(-a_4xt))dt$$

Тогда нетрудно увидеть, что

$$\sup_{0<s<\infty} \int_0^{\infty} K_{34}(x-s)dx = \frac{1}{\lambda_2^2}$$

Из (19) получим условие разрешимости (18) в виде

$$0 < \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} < 2$$

Таким образом, в этом случае уравнение (18) можно решить методом последовательных приближений.

Далее из (4) можно получить интегральное уравнение

$$\tau(x)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-\infty}^{0} K_{12}(x-s)\tau(s)ds = f_{12}(x) \quad (-\infty < x < 0)$$

которое допускает решение с помощью метода последовательных приближений при $0 < \lambda_2^2/\lambda_1^2 < 2$. Из условий $0 < \lambda_1^2/\lambda_2^2 < 2$ и $0 < \lambda_2^2/\lambda_1^2 < 2$ следует, что мы фактически определяем $\tau(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ при любых значениях $0 < \lambda_1, \lambda_2 < \infty$. Здесь значение $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ не входят, поскольку при этих значениях имеем

$$\lambda_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_{34}(t)dt = \lambda_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(t)dt = 1$$

CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC SEMI-PLANE AT BOUNDARY OF WHICH THE INFINITE STEP-HOMOGENEOUS STRINGER IS GLUED

E. KH. GRIGORIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵԶՐԻՆ ԱՄՐԱՑՎԱԾ (ՍՈՍՆՁՎԱԾ) ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ՎԵՐԱԴԻՐՈՎ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է առաձգական կիսահարթության համար խնդիր, որը իր եզրով ամրացված է երկու կիսաանվերջ կտորներից բաղկացած կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ վերադիրով։ Կիսահարթությունը դեֆորմացվում է վերադիրին կիրառված ուժի ազդեցության տակ։

Ենթադրվում է, որ սոսնձի շերտը գտնվում է մաքուր սահքի վիճակում, իսկ վերադիրը միառանցք լարվածային վիճակում է։ Խնդիրը Ֆուրյեի ձևափոխությունների օգնությամբ բերվում է կոնտակտային շոշափող լարումների տրանսֆորմանտների նկատմամբ։ Իրական առանցքի վրա ֆունկցիոնալ անհավասարման լուծմանը։ Այդ ֆունկցիոնալ հավասարման համար կառուցված է փակ լուծում, այնուհետև կոնտակտային լարումների համար ստացված է ասիմպտոտիկ բանաձևեր։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян Э. Х.* Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, 1979, №3.
2. *Melan E.* Ein Beitrag Theorie geschweisster Verbindungen Ingenieur Archiv. Band III, s. 123, 1932.
3. *Benthem J. P.* On the diffusion of a load from a semi-infinite stringer bonded to a sneet. Contr. Th. Aircr. Struct., 1972. p. 117—131.
4. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1971.
5. Функциональный анализ. Ср.: Справочная математическая библиотека. М., 1972.
6. *Lighthill M. J.* An introduction to Fourieranalysis and generalised functions.—Camb Univ. Press, 1959.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды.—М.: Наука, 1981.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
19.IX.1989