

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК
 ГИШНИ 3. 11

В работе приводится анализ амплитудно-частотных зависимостей гибких пластин и оболочек. Рассматриваются прямоугольные в плане ($a \times b$) гибкие оболочки двойной кривизны k_1, k_2 , толщины h , изготовленные из изотропного материала с характеристиками упругости E, ν и плотностью ρ .

Пусть оболочка отнесена к ортогональной криволинейной системе координат $Oxyz$ так, что координатная поверхность $z = 0$ совпадает со средней поверхностью оболочки и координатные линии ($y = \text{const}, z = 0$) и ($x = \text{const}, z = 0$) совпадают с линиями главных кривизн средней поверхности.

В случае шарнирно опертой по контуру и свободной от внешних нагрузок оболочки, пренебреженным влиянием друг на друга различных гармоник в представлении для прогиба оболочки

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1)$$

для определения $w_{mn}(t)$ получается нелинейное дифференциальное уравнение [1-3]

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \omega_{0mn}^2 w_{mn} - \beta_{mn} w_{mn}^3 = 0 \quad (2)$$

Здесь введены обозначения: $i = a/b$,

$$\omega_{0mn} = \frac{\pi^2 h}{2a^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)} \left[(m^2 + i^2 n^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{\pi^4 h^2} \frac{(k_2 m^2 + k_1 i^2 n^2)^2}{(m^2 + i^2 n^2)^2} \right]}$$

— частота собственных линейных колебаний,

$$\beta_{mn} = \frac{16E\nu^2}{9a^2} \frac{mn(k_2 m^2 + i^2 k_1 n^2)}{(m^2 + i^2 n^2)^2}, \quad \beta_{mn} = \frac{512E\nu^4}{9\pi^4} \frac{m^2 n^2}{(m^2 + i^2 n^2)^2}$$

Следует отметить, что предпоследний нелинейный член в уравнении (2) обусловлен кривизной оболочки и показывает неоднородность сопротивления оболочки к возмущениям (прогибам, сравнимых с толщиной), приложенных к оболочке со стороны выпуклости и вогнутости [2].

В случае пластинки ($k_1 = k_2 = 0$) из (2) в первом приближении

$$w_{mn}(t) = f_{mn} \cos \omega_{mn} t \quad (3)$$

получается следующая зависимость частоты собственных нелинейных колебаний ω_{mn} от амплитуды колебания f_{mn} :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\omega_{0mn}^2 + \frac{3}{4} 2mn f_{mn}^2} \quad (4)$$

где

$$\omega_{0mn} = \frac{\pi^2 h}{2a^2} \sqrt{\frac{E}{3\nu(1-\nu^2)}} (m^2 + n^2)$$

— частота собственных линейных колебаний пластинки. Из (4) для квадратной в плане ($\nu = 1$) пластинки при $\nu = 0,3$ получается

$$\omega_{mn} = \omega_{0mn} \sqrt{1 + 4,78 \frac{m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^2} \left(\frac{f_{mn}}{h}\right)^2}$$

и нетрудно показать, что ω_{mn} принимает свое наименьшее значение при $m = n = 1$.

В случае оболочек, в первом приближении решение уравнения (2) представляется в виде

$$w_{mn}(t) = f_{0mn} + f_{1mn} \cos \omega_{mn} t \quad (5)$$

и для определения частот собственных нелинейных колебаний оболочки получается формула

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{0mn}^2 - 2\gamma_{mn} f_{0mn} + 3\beta_{mn} f_{0mn}^2 + \frac{3}{4} \gamma_{mn} f_{1mn}^2 \quad (6)$$

где f_{0mn} определяется из кубического уравнения

$$f_{0mn}^3 - \frac{2mn}{\gamma_{mn}} f_{0mn}^2 + \left(\frac{\omega_{0mn}^2}{\beta_{mn}} + \frac{3}{2} f_{1mn}^2 \right) f_{0mn} - \frac{2mn}{2\beta_{mn}} f_{1mn}^2 = 0 \quad (7)$$

для каждой пары m, n и f_{1mn} .

В случае оболочек, в отличие от случая пластинок, когда учет влияния амплитуд колебаний приводит к увеличению значений собственных частот, возможно также уменьшение частот собственных нелинейных колебаний.

Для численного анализа характера амплитудно-частотных зависимостей рассмотрим квадратную в плане ($\lambda = 1$) цилиндрическую оболочку радиуса R . В этом случае из (6) и (7) получаются соответственно

$$\bar{\omega} = (a_1 - a_2 \bar{x} + a_3 \bar{x}^2 + 0,25a_4 \bar{y}^2)^{1/2} \quad (8)$$

$$\bar{x}^3 - a_1 \bar{x}^2 + (a_2 + 1,5\bar{y}^2) \bar{x} - 0,5a_4 \bar{y}^2 = 0 \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\bar{\omega}(m, n) = \frac{2a^2}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{E}} \omega_{mn}, \quad \bar{x} = \frac{f_{0mn}}{h}, \quad \bar{y} = \frac{f_{1mn}}{h}$$

$$a_2 = \frac{9km}{32n}, \quad a_2 = \frac{3\pi^4}{2048(1-\nu^2)} \left[\frac{(m^2+n^2)^4}{m^2 n^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} k^2 \frac{m^2}{n^2} \right]$$

$$a_2 = (m^2+n^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} k^2 \frac{m^4}{(m^2+n^2)^2}$$

$$a_4 = \frac{384(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{m^3 n}{(m^2+n^2)^2}, \quad a_4 = \frac{2048(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{m^2 n^2}{(m^2+n^2)^2}$$

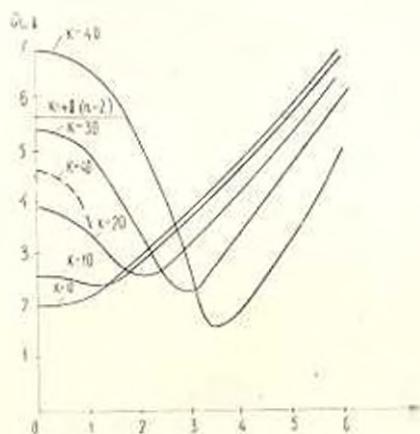
$k = a^2/Rh$ — параметр кривизны оболочки.

Ставится задача нахождения

$$\bar{\omega}_* = \inf_{(m, n)} \bar{\omega}(m, n), \quad (m, n \in N)$$

то есть первую (наименьшую по m, n) частоту собственных нелинейных колебаний.

На фиг. 1 при $\nu = 0,3$ приведены графики зависимостей $\bar{\omega}_*$ от y для различных значений параметра кривизны k . Как видно, частоты собственных нелинейных колебаний пластины возрастают с



Фиг. 1

увеличением амплитуды возмущения нелинейных колебаний. С увеличением кривизны k и амплитуд возмущений y наблюдается уменьшение частот колебаний $\bar{\omega}_*$ до некоторого значения $\bar{\omega}^0$. При дальнейшем увеличении амплитуд частоты нелинейных колебаний возрастают. В табл. 1 приведены наименьшие значения $\bar{\omega}_*$ в зависимости от параметра кривизны k и соответствующие y_* .

Таблица 1

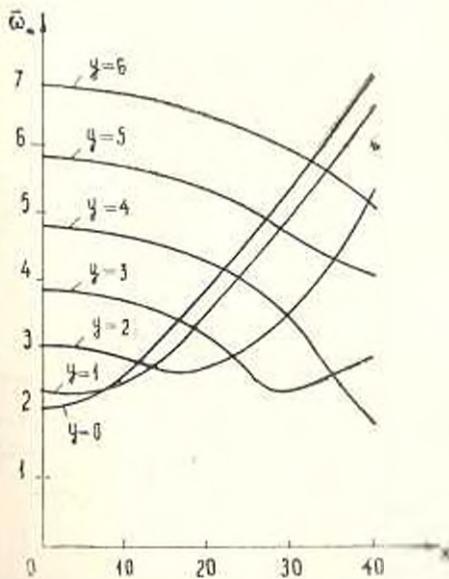
$k \backslash y$	0	10	20	30	40
$\bar{\omega}_1^0$	2.1	2.4	2.5	2.3	1.6
y_0	0.0	1.0	2.0	3.0	3.5

Следует отметить, что при $k=40$ и $0 \leq y \leq 1,0$ уравнение (9) допускает три действительных корня для x . В табл. 2 приведены значения x_i , соответствующие $\bar{\omega}_{i1}$.

Таблица 2

$y \backslash x_i$	x_1	$\bar{\omega}_{\pm 1}$	x_2	$\bar{\omega}_{\pm 2}$	x_3	$\bar{\omega}_{\pm 3}$
0.0	0	6.99	4.62	3.85	6.63	1.61
0.5	0.05	6.89	4.66	3.77	6.55	1.39
1.0	0.11	6.59	4.80	3.39	6.26	3.60

Частоты колебаний при $x=x_2$ минимые, то есть соответствующие нелинейные колебания неустойчивы. Здесь возможны нелинейные колебания с частотами $\bar{\omega}_{\pm 1}$ и $\bar{\omega}_{\pm 2}$, причем $\bar{\omega}_{\pm 2} < \bar{\omega}_{\pm 1}$. На фиг. 1 пунктирными линиями обозначены $\bar{\omega}_{\pm 1}$.



Фиг. 2

Следует отметить, что кроме случаев $k=40$ и $0 < y \leq 1,5$ первые частоты собственных нелинейных колебаний, в рассматриваемых пре-

делах изменения k и \bar{y} , достигают при $m=n=1$. В случае же $k=40$ и $0 \leq \bar{y} \leq 1,5$, $\bar{\omega}_*$ достигаются при $m=1, n=2$. В этом случае частоты собственных колебаний слабо зависят от \bar{y} и $\bar{\omega}_* \approx 5,6$ (на фиг. 1 — тонкая линия), что больше соответствующих $\bar{\omega}_{*0}$.

На фиг. 2 приведены графики зависимостей $\bar{\omega}_*$ от параметра кривизны оболочки k для различных \bar{y} . В отличие от частот собственных линейных колебаний $\bar{\omega}_0$, значения частот собственных нелинейных колебаний могут уменьшаться с увеличением кривизны средней поверхности оболочки.

SELF-VIBRATION OF FLEXIBLE SHELLS

V. TS. GUNY

ՄԻՈՅ ԹԱՂԱՆՅԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏՆՏԱՆՈՒԹՅՆԵՐԸ

Վ. Յ. ԳՈՒՆՅԸ

Ա. Վ. Ի. Ն. Վ. Ն. Վ.

Աշխատանքում ուսումնասիրված են ճկուն թաղանթների սեփական ոչ գծային տատանումների հարցերը: Հողակապրեն ամրացված կլորերով կրկնա- կի կորություն ճկուն թաղանթի համար ստացված են ամպլիտուդա— հաճախականություն կապերը և բերված է նրանց ուսումնասիրությունը՝ կախված թաղանթի կորության բնութագրիչ սեծությունից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.—М.: ГИИЛ, 1956. 600 с.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пласти и оболочек.—М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Окавацуми О. Л. Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изв. АН СССР, 1957. 196 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
19.XII.1988