УДК 539.3:534.1

ВОЗБУЖДЕНИЕ СДВИГОВЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН
 В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ВОЛНОЙ РЕЛЕЯ

БАГДАСАРЯН Г. Е.

Известно, что в упругой среде при отсутствии магнитного поля, не могут распространяться сдвиговые поверхностные волны, а волны Релея при указанных условиях всегда существуют.

В настоящей работе показано, что в магнитомягком ферромагнитном полупространстве, при распространении в ней релеевской волны, как следствие, возбуждается сдвиговая поверхностная волна, если присутствует наклонное к плоскости распространения магнитное поле.

1. Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил.

Характеристики магнитного поля представим в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}, \quad \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m}$$

где $\vec{H}_0$, $\vec{B}_0$ и $\vec{M}_0$ — соответственно векторы напряженности магнитного поля, магнитной индукции и намагниченности недеформированного тела; $\vec{h}$, $\vec{b}$ и $\vec{m}$ — возмущения к указанным величинам, обусловленные деформацией среды. В вакууме векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, где μ_0 — магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м), а в магнитомягком материале — соотношением $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \gamma \vec{H}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, где γ — магнитная восприимчивость, $\mu_r = \gamma + 1$ — относительная магнитная проницаемость среды.

Невозмущенное магнитное поле во всем пространстве определяется из решения следующей задачи магнитоэластики:

$$\text{rot } \vec{H}_0 = 0, \quad \text{div } \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{n} \times [\vec{H}_0 - \vec{H}_0^{(r)}] = 0, \quad \vec{n} \times [\vec{B}_0 - \vec{B}_0^{(r)}] = 0 \quad \text{при } (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma$$

$$\vec{H}_0 \rightarrow \vec{H}^0 \quad \text{при } |r| \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности Γ тела, r — радиус-вектор, x_i — декартовы координаты

рассматриваемой точки, H^0 — напряженность заданного магнитного поля на бесконечности при отсутствии ферромагнитного тела; индекс e означает принадлежность к внешней (окружающей тела) среде, электромагнитные свойства которой эквивалентны свойствам вакуума.

Характеристики возмущенного состояния определяются из уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [1, 2]. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения и граничные условия возмущенного состояния, приведенные в работе [3].

Система дифференциальных уравнений магнитоупругости возмущенного состояния

$$\operatorname{div} \bar{S} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \quad \operatorname{rot} \bar{h} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{h} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\bar{S} = \bar{t} + \bar{T}$; $\bar{t}$ и $\bar{T}$ — тензоры магнитоупругих напряжений и напряжений Максвелла соответственно, причем

$$t_{ij} = \tau_{ij} + \gamma_{02} H_0 h_j \partial_i h_j - \gamma_{02} (H_0 h_j - H_0 h_i) \delta_{ij} \quad (1.3)$$

$$T_{ij} = \gamma_{01} \left(\gamma_{01} H_0 h_j - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} H_0 h_k \right) + \gamma_{01} \left[\gamma_{01} (H_0 h_j - H_0 h_i) - \delta_{ij} H_0 h_k \right]$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, δ_{ij} — символ Кронекера, τ_{ij} — компоненты тензора упругих напряжений

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

λ и μ — постоянные Ляме, u_i — компоненты вектора упругих перемещений, ρ — плотность среды.

Уравнения для индуцированного в вакууме магнитного поля

$$\operatorname{rot} \bar{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{h}^{(e)} = 0 \quad (1.5)$$

Граничные условия на поверхностях раздела двух сред

$$\begin{aligned} |S_{ij} - S_{ij}^{(e)}| n_i = 0, \quad \epsilon_{ijk} |n_i (h_k - h_k^{(e)}) - n_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} (H_m - H_m^{(e)})| = 0 \\ n_i |b_i - b_i^{(e)}| = n_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} (B_m - B_m^{(e)}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где ϵ_{ijk} — символ Леви-Чивиты.

2. На основе приведенных уравнений и граничных условий рассмотрим задачу распространения двумерных поверхностных волн в магнитомягком полупространстве при наличии внешнего постоянного магнитного поля. Пусть упругая изотропная магнитомягкая ферромагнитная среда занимает полубесконечную область $x_2 \leq 0$ (в декартовой

системе координат x_1, x_2, x_3) и находится во внешнем однородном постоянном магнитном поле, вектор напряженности которого параллелен границе среды. В области $x_2 > 0$, где вакуум, задан вектор магнитной индукции $\vec{B}_0^{(e)}(B_{01}^{(e)}, 0, B_{03}^{(e)})$. В этом случае задача (1.1) имеет следующее решение:

$$\vec{B}_0^{(e)} = B_{01}^{(e)} \vec{e}_1 + B_{03}^{(e)} \vec{e}_3, \quad \vec{B} = B_{01} \vec{e}_1 + B_{03} \vec{e}_3, \\ \vec{H}_0^{(e)} = \mu_0^{-1} \vec{B}_0^{(e)}, \quad \vec{H} = (\mu_0^{(e)})^{-1} \vec{B}_0, \quad \vec{B} = \mu_r \vec{B}_0^{(e)} \quad (2.1)$$

где $\vec{e}_k$ — единичные векторы координатных осей.

Задачу будем решать в двумерной постановке, предполагая, что все искомые величины не зависят от координаты x_3 . Тогда из уравнений $\text{rot } \vec{h} = 0$, $\text{rot } \vec{h}^{(e)} = 0$ и граничного условия (1.6) легко получить, что $h_2^{(e)} = h_2 = 0$. Учитывая это, из (1.2) — (1.4), в силу (2.1) и принятого предположения о двумерности движения, получим следующие уравнения, описывающие распространение двумерных волн в магнитомягкой ферромагнитной среде:

$$c_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2\gamma B_{01}^{(e)}}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \Delta \varphi = 0 \quad (2.2)$$

$$c_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2\gamma B_{01}^{(e)}}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \Delta \varphi^{(e)} = 0$$

$$c_2^2 \Delta u_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

где $\varphi^{(e)}$ и φ — потенциалы индуцированного магнитного поля в области вакуума и в среде, соответственно, Δ — двумерный оператор Лапласа

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad h_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad h_k^{(e)} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_k}$$

Аналогичным образом из (1.6) получаются следующие граничные условия на плоскости $x_2 = 0$:

$$c_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\gamma (B_{01}^{(e)})^2}{\rho \phi} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\gamma B_{01}^{(e)}}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \quad \varphi = \varphi^{(e)}$$

$$(c_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_2} = \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\gamma B_{01}^{(e)}}{\mu_0} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (2.4)$$

$$c_2^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\gamma B_{01}^{(e)} B_{03}^{(e)}}{\mu_0^2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\gamma B_{03}^{(e)}}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \quad (2.5)$$

Из (2.2) — (2.5) следует, что: а) задача (2.2), (2.4) (плоская задача для определения $u_1, u_2, \varphi, \varphi^{(e)}$) или задача распространения маг-

магнитной волны Релея) отделена от задачи (2.3), (2.5) (плоская задача для определения u_1 или задача распространения сдвиговых поверхностных волн); б) для исследования сдвиговых поверхностных волн необходимо иметь граничные значения величин u_1 и h_2 , возникающие вследствие распространения магнитоупругой волны Релея; в) волны Релея и магнитомягкой среды при своем распространении генерируют сдвиговые поверхностные упругие волны (вспомним, что при отсутствии магнитного поля вместо упругих сдвиговых поверхностных волн не существует); г) существование сдвиговых упругих поверхностных волн обусловлено также тем, что внешнее магнитное поле направлено наклонно ($B_0^{(0)} \neq 0, B_0^{(2)} \neq 0$), что приводит к распространению релеевской волны.

3. Рассмотрим задачу о магнитоупругих поверхностных волнах Релея, описываемые уравнениями (2.2) и граничными условиями (2.4). Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_i = a_i \exp(i(kx_2 - \omega t)) \sum_{j=1}^4 A_j \exp(\beta_j x_1), \quad i=1, 2 \quad (3.1)$$

$$\varphi = \varphi_0 \exp(i(kx_2) \exp(i(kx_2 - \omega t)), \quad \varphi^{(1)} = \varphi_1 \exp(\beta_1 x_1) \exp(i(kx_2 - \omega t))$$

соответствующем распространению вдоль положительной оси x_1 поверхностной волны с частотой ω , волновым числом k , фазовой скоростью $c = \omega/k$ и амплитудой, зависящей от координаты x_2 . Решение (3.1) соответствует волне, затухающей внутри тела, если $\beta_j > 0, \beta_3 > 0$ и $\beta_4 < 0$.

Подставляя (3.1) в уравнения (2.2) и требуя, чтобы (3.1) описывало поверхностную волну, получим

$$\begin{aligned} \beta_1^2 - \beta_3^2 - \beta_4^2 &= k^2, \quad \beta_2^2 = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}, \quad \beta_4 = 2\sqrt{1-\gamma^2} \\ A_2^{(1)} &= iA_1^{(1)}, \quad \sqrt{1-\gamma^2}A_3^{(1)} = iA_4^{(1)}, \quad A_3^{(2)} = \sqrt{1-\gamma^2}A_1^{(1)} \\ 2/B_0^{(0)}\varphi_0 &= k^2 A_1^{(1)}/\omega^2, \quad \varphi_1 = c\beta_1^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.4) для оставшихся неизвестных $A_1^{(1)}$ и $\varphi_0^{(1)}$, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Из условия совместности этой системы получим следующее характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} &[(1 - \gamma^2 - 1)\omega]^2 (1 - \gamma^2)(1 - \gamma^2) - \omega^2 (1 - \gamma^2) = \\ &= \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \left[1 - \frac{\gamma}{2} + (\gamma^2 + 1)\right], \quad z = \frac{\gamma |B_0^{(0)}|^2}{\mu_0 \omega^2 (\gamma + 2)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

определяющее безразмерные фазовую скорость z поверхностной волны.

В (3.3) параметр α характеризует напряженность внешнего магнитного поля и при $\alpha=0$, $x=0$ из (3.3) получается известное уравнение Релея для чисто упругих поверхностных волн. Анализ уравнения (3.3) и зависимости от параметров α и γ показывает что: а) для каждого γ и α уравнение (3.3) имеет единственный действительный положительный корень, удовлетворяющий условию $0 < 1$, то есть в любой упругой магнитомягкой среде для любого значения напряженности магнитного поля могут распространяться поверхностные волны рассматриваемого типа с единственной скоростью; б) скорости поверхностных магнитоупругих волн не зависят от частоты колебаний и поэтому эти волны, как и чисто упругие релейские волны, распространяются без дисперсии; в) скорость распространения поверхностной волны для каждой среды (для каждого γ) с увеличением напряженности магнитного поля увеличивается, оставаясь меньше, чем скорость поперечной объемной волны.

4. На основе уравнения (2.3) и граничного условия (2.5) рассмотрим вопросы существования и распространения сдвиговых поверхностных волн. Для этого, как видно из (2.5), необходимо иметь значения величин u_2 и h_2 при $x_2=0$. Используя (3.1)–(3.3) и (2.4), получим

$$u_2(x_1, 0, t) = bD \cos(kx_1 - \omega t), \quad h_2(x_1, 0, t) = \frac{\chi B_{0z}^{(e)} k \gamma}{\gamma_0(\chi + 2)} D \sin(kx_1 - \omega t) \quad (4.1)$$

где D – произвольное постоянное.

В силу (4.1), решение задачи (2.3), (2.5), представляющее поверхностную волну, имеет вид

$$u_2 = \frac{2\gamma(\chi + 1) B_{0z}^{(e)} B_{0x}^{(e)}}{\gamma_0^2(\chi + 2)} \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma}} e^{2\gamma x_2} D \sin(kx_1 - \omega t) \quad (4.2)$$

Из (4.2) видно, что если в магнитомягкой ферромагнитной среде распространяется релейская волна ($D \neq 0$), то она, при $B_{0z}^{(e)} \neq 0$ и $B_{0x}^{(e)} \neq 0$ генерирует сдвиговые поверхностные упругие волны ($u_2 \neq 0$). Причем амплитуда сдвиговых волн прямо пропорциональна нормальному составляющему магнитного поля $B_{0z}^{(e)}$ и при напряженности магнитного поля порядка одной теслы указанная амплитуда может превышать амплитуду релейской волны.

EXCITMENT OF SHEAR SURFACE WAVES IN SEMISPAC BY RAYLEIGH WAVE

G. E. BAGDASARIAN

ԳԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՍԱՀՔԻ ՄԱԿԵՐՆԵՎՈՒԹՅՈՒՆԻՆ ԱԼՔՐՆԵՐԻ
ԳՐԳՈՒՄԸ ԵՆՄԱՆԻ ԱԼՔԻ ԸՆԴՈՑՈՎ

Գ. Ե. ԸՆԿՆԱՍՐՏԱՆ

Ա մ ֆ ո թ ո մ

Աշխատանքում ցույց է արված, որ մակերևապես փափուկ ֆերոմագնիսական կիսատարածությունում մեկնի այբր տարածվելիս, որպես հեռանք, երանում զրգուվում է սահքի մակերեվութային այբր, կիև անկա է տատանման հարթության նկատմամբ թեք մաղնիսական դաշտ

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Brown W. F. in Electric and Magnetic Forces—American Journal of Physics, 1951, v. 19, pp. 299—304, 333—350.
2. Tiersten H. F. Coupled Magneto-mechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators—J. of. Math. Physics, 1961, v. 5, № 9, pp. 1298—1318.
3. Pao Y.-H. and Yeh, C. S. A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids.—Int. Journal of Eng Science, 1973, v. 11, pp. 415—436.

Երևանский государственный
университет

Поступила в редакцию
8.VI.1988