

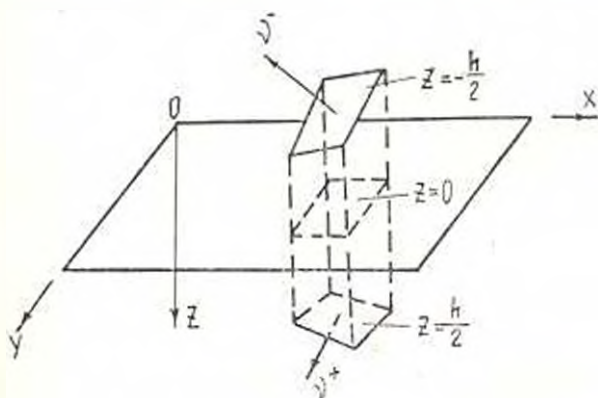
К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ ПОПЕРЕЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

КИРАКОСЯН Р. М.

На основе решений классической теории поперечного изгиба выводятся формулы для поперечных касательных и нормальных напряжений пластинок переменной толщины, изготовленных из идеально-пластического материала с прямолинейной или цилиндрической ортотропией. Эти формулы могут быть полезными при оценке оптимальных проектов пластинок из современных материалов, прочностные свойства которых в поперечном направлении значительно уступают свойствам продольных направлений.

1. Рассмотрим тонкую прямоугольную пластинку переменной толщины h , отнесенную к системе декартовых координат x, y, z (фиг. 1). Пластика несет вертикальную нагрузку. Компоненты ее интенсивности, приведенные к единице площади срединной плоскости, имеют вид

$$X^* = Y^* = 0, \quad Z^* = Z^*(x, y) \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь и в дальнейшем знаками $+$, $-$ и $\cdot$ будем обозначать величины, относящиеся к поверхностям пластины $z = -h/2$ и $z = +h/2$, соответственно.

Будем считать, что пластинка изготовлена из несжимаемого идеально-пластического ортотропного материала, главные направления которого параллельны координатным осям. Поведение материала опи-

связывается законом течения, ассоциированным с поверхностью текучести Мизеса-Хилла.

Выведем формулы, позволяющие вычислить значения основных напряжений σ_x , τ_{xy} и τ_{yz} с помощью решений классической теории поперечного изгиба пластинок.

В рамках этой теории поверхность текучести Мизеса-Хилла можно представить уравнением [1]

$$2\Phi = (H+G)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H+F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 - 1 = 0 \quad (1.2)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{xy}^2} + \frac{1}{\sigma_{yz}^2} - \frac{1}{\sigma_{xz}^2} \right), \quad F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{xy}^2} + \frac{1}{\sigma_{yz}^2} - \frac{1}{\sigma_{xz}^2} \right) \quad (1.3)$$

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{xy}^2} + \frac{1}{\sigma_{yz}^2} - \frac{1}{\sigma_{xz}^2} \right), \quad N = \frac{1}{2\tau_{xy}^2}$$

Через σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz} обозначены пределы текучести материала по направлениям координатных осей x , y и z соответственно, а τ_{xy} — предел текучести при чистом сдвиге в плоскости xy .

Из ассоциированного закона течения для компонент скоростей деформации имеем

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -\lambda \sigma_x = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} = \lambda [(H+G)\sigma_x - H\sigma_y] \\ \dot{\epsilon}_y &= -\lambda \sigma_y = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} = \lambda [(H+F)\sigma_y - H\sigma_x] \\ \dot{\gamma}_{xy} &= -2\lambda \tau_{xy} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} = 2\lambda N \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь λ — неотрицательный параметр, $\dot{\epsilon}_x$, $\dot{\epsilon}_y$ и $\dot{\gamma}_{xy}$ — скорости изменения кривизн срединной плоскости пластинки, которые выражаются через скорость прогиба w формулами [2]

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

Из (1.4) для основных напряжений пластинки σ_x , σ_y и τ_{xy} находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\lambda}{\lambda \Delta} [(H+F)\sigma_y + H\sigma_x], \quad \sigma_y = -\frac{\lambda}{\lambda \Delta} [(H+G)\sigma_x + H\sigma_y] \\ \tau_{xy} &= -\frac{\lambda}{\lambda N} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\Delta = FG + GH + HF \quad (1.7)$$

Подставляя (1.6) в условие пластичности (1.3), для параметра получим

$$l = |z|D \quad (1.8)$$

где

$$D = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \left[(H+F)z_x^2 + 2Hz_xz_y + (H+G)z_y^2 + \frac{2h}{N} z_x^2 \right]} \quad (1.9)$$

С учетом (1.8) выражения напряжений (1.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\operatorname{sign} z \frac{(H+F)z_x + Hz_y}{D\Delta}, \quad \sigma_y = -\operatorname{sign} z \frac{(H+G)z_y + Hz_x}{D\Delta} \\ \tau_{xy} &= -\operatorname{sign} z \frac{z_{xy}}{DN} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Направляющие косинусы внешних нормалей поверхностей пластинки v^- и v^+ определяются формулами [3]

$$\begin{aligned} l^- = \cos(v^-; \hat{x}) = l^+ = \cos(v^+; \hat{x}) &= -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \\ m^- = \cos(v^-; \hat{y}) = m^+ = \cos(v^+; \hat{y}) &= -\frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \\ n^- = \cos(v^-; \hat{z}) = -n^+ = -\cos(v^+; \hat{z}) &= -\frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя (1.1), (1.11) и учитывая несосновные напряжения, поверхностные условия пластинки можно представить в виде

при $z = -h/2$

$$\begin{aligned} \sigma_x^- l^- + \tau_{xy}^- m^- + \tau_{xz}^- n^- = X^- |n^-| = 0, \quad \tau_{xy}^- l^- + \sigma_y^- m^- + \tau_{yz}^- n^- = Y^- |n^-| = 0 \\ \tau_{xz}^- l^- + \tau_{xy}^- m^- + \sigma_z^- n^- = Z^- |n^-| = \frac{2Z^-}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

при $z = +h/2$

$$\begin{aligned} \sigma_x^+ l^+ + \tau_{xy}^+ m^+ + \tau_{xz}^+ n^+ = X^+ |n^+| = 0, \quad \tau_{xy}^+ l^+ + \sigma_y^+ m^+ + \tau_{yz}^+ n^+ = Y^+ |n^+| = 0 \\ \tau_{xz}^+ l^+ + \tau_{xy}^+ m^+ + \sigma_z^+ n^+ = Z^+ |n^+| = \frac{2Z^+}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Из первых двух условий (1.12) и (1.13) с учетом (1.10) и (1.11) для поверхностных значений касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} получим

$$\begin{aligned}\tau_{xz} = \tau_{xz}^* &= -\frac{1}{2D\Delta} \left\{ [(H+F)z_x + Hz_y] \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right\} \\ \tau_{yz} = \tau_{yz}^* &= -\frac{1}{2D\Delta} \left\{ [(H+G)z_x + Hz_y] \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right\}\end{aligned}\quad (1.14)$$

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды при отсутствии объемных сил имеют вид [2]

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{z}}{\partial z} = 0 \quad (1.15)$$

Исключив из рассмотрения точки срединной плоскости $z=0$ для областей пластинки $|z|>0$, с учетом (1.10) можно написать

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = -\operatorname{sign} z \cdot \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(H+F)z_x + Hz_y}{D} \right], \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\operatorname{sign} z \cdot \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -\operatorname{sign} z \cdot \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right), \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\operatorname{sign} z \cdot \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(H+G)z_x + Hz_y}{D} \right]$$

Имея в виду эти выражения, из первых двух уравнений равновесия (1.15) при $|z|>0$ находим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \operatorname{sign} z \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(H+F)z_x + Hz_y}{D} \right] + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right\} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \operatorname{sign} z \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(H+G)z_x + Hz_y}{D} \right] + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right\}$$

Интегрировав (1.17) в областях $z<0$ и $z>0$, получим:

при $z<0$

$$\tau_{xz} = C_1^-(x, y) - z \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(H+F)z_x + Hz_y}{D} \right] + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right\} \quad (1.18)$$

$$\tau_{yz} = C_2^-(x, y) - z \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(H+G)z_x + Hz_y}{D} \right] + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right\}$$

при $z>0$

$$\tau_{xz} = C_1^+(x, y) + z \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(H+F)z_x + Hz_y}{D} \right] + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right\} \quad (1.19)$$

$$\tau_{yz} = C_2^+(x, y) + z \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(H+G)z_x + Hz_y}{D} \right] + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right\}$$

где C_1^- , C_1^+ и C_2^- , C_2^+ — функции интегрирования, определяющиеся из условий на поверхностях $z = \pm h/2$.

Используя (1.18) и (1.19), из (1.14) находим

$$\begin{aligned} C_1^- = C_1^+ = & -\frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(H+F)x_v + Hz_v}{D} \right\} + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2D\Delta} \left\{ [(H+F)x_v + Hz_v] \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta}{N} x_{vy} \frac{\partial h}{\partial y} \right\} \\ C_2^- = C_2^+ = & -\frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(H+G)x_v + Hz_v}{D} \right\} + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2D\Delta} \left\{ [(H+G)x_v + Hz_v] \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в (1.18) и (1.19), для поперечных касательных напряжений в областях $|z| > 0$ получим

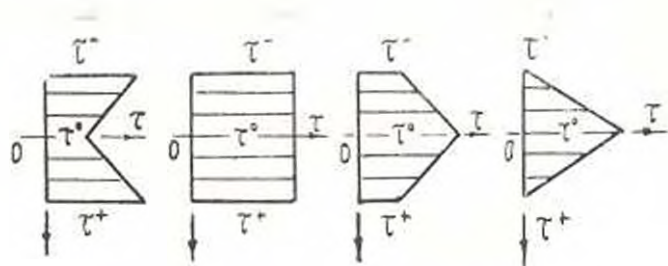
$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & -\frac{h-|z|}{2\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(H-F)x_v + Hz_v}{D} \right\} + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2\Delta} \left\{ [(H-F)x_v + Hz_v] \frac{\partial |z|}{\partial x} + \frac{\Delta}{N} x_{vy} \frac{\partial h}{\partial y} \right\} \\ \tau_{yz} = & -\frac{h-|z|}{2\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(H+G)x_v + Hz_v}{D} \right\} + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2D\Delta} \left\{ [(H+G)x_v + Hz_v] \frac{\partial |z|}{\partial y} + \frac{\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отметим, что предельные значения τ_{xz} и τ_{yz} при $z \rightarrow \pm 0$ совпадают, и на срединной плоскости имеем

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^0 = \tau_{xz}|_{z=0} = & -\frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(H-F)x_v + Hz_v}{D} \right\} + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2D\Delta} \left\{ [(H-F)x_v + Hz_v] \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta}{N} x_{vy} \frac{\partial h}{\partial y} \right\} \\ \tau_{yz}^0 = \tau_{yz}|_{z=0} = & -\frac{h}{2\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(H+G)x_v + Hz_v}{D} \right\} + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2D\Delta} \left\{ [(H+G)x_v + Hz_v] \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Значения же этих напряжений на поверхностях $z = \pm h/2$ определяются формулами (1.14).

Таким образом, τ_{xz} и τ_{yz} являются непрерывными, четными, кусочно-линейными функциями по z . Возможные качественные формы их графиков представлены на фиг. 2.



Фиг. 2

Из третьего уравнения равновесия (1.15) с учетом (1.21) можно написать

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial z} = -[z A_2(x, y) + A_3(x, y)] \quad (1)$$

где

$$A_1(x, y) = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{(H+F)x_z + Hx_y}{D} \right] + \frac{2\Delta}{N} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{(H+G)x_z + Hx_y}{D} \right] \right| \quad (1)$$

$$A_2(x, y) = \frac{h}{2} A_1(x, y) + \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(H+F)x_z + Hx_y}{D} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right\} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(H+G)x_z + Hx_y}{D} \right] + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \right\} \frac{\partial h}{\partial y} \\ + \frac{1}{2D\Delta} \left\{ [(H+F)x_z + Hx_y] \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + [(H+G)x_z + Hx_y] \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right\}$$

Интегрировав (1.23) по z , находим:

$$\text{при } z < 0 \quad z_z = C_2^-(x, y) - \frac{z^2}{2} A_2 + z A_3 \quad (1)$$

$$\text{при } z > 0 \quad z_z = C_2^+(x, y) - \frac{z^2}{2} A_2 + z A_3 \quad (1)$$

где C_2^- и C_2^+ — функции интегрирования.

Имея в виду, что при $z \rightarrow \pm 0$ напряжение z_z должно быть непрерывным, из (1.25) и (1.26) заключаем

$$C_2^- = C_2^+ = C_2 \quad (1)$$

С целью их определения обратимся к третьим поверхностным условиям (1.12) и (1.13). С учетом (1.1), эти условия представим в виде

$$z_z = Z - \frac{1}{2} z_z \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{1}{2} z_z \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1)$$

$$z_2^+ = Z^+ + \frac{1}{2} \tau_{xz}^+ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} \tau_{yz}^+ \frac{\partial h}{\partial y}$$

Используя (1.27), (1.28), из (1.25) и (1.26) получим

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{8} A_1 - \frac{h}{2} A_2 + C_3 &= -Z^- - \frac{1}{2} \tau_{xz}^- \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} \tau_{yz}^- \frac{\partial h}{\partial y} \\ -\frac{h^2}{8} A_1 + \frac{h}{2} A_2 + C_3 &= Z^+ + \frac{1}{2} \tau_{xz}^+ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} \tau_{yz}^+ \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Сложив равенства (1.29), находим

$$C = \frac{Z^+ - Z^-}{2} \quad (1.30)$$

Объединив (1.25) и (1.26), с учетом (1.24), (1.30) для нормального напряжения σ_z окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{Z^+ - Z^-}{2} - \frac{z(Z^+ - Z^-)}{2\Delta} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left| \frac{(H+F)z_y - Hz_x}{D} \right| + \frac{2\Delta}{N} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left| \frac{(H+G)z_y - Hz_x}{D} \right| \left. + \frac{z}{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \left| \frac{(H+F)z_y - Hz_x}{D} \right| + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| + \right. \\ &+ \frac{z}{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial y} \right| \left| \frac{(H+G)z_y - Hz_x}{D} \right| + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| + \frac{z}{2D\Delta} [(H+F)z_x + Hz_y] \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right| + \\ &+ \frac{2\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + [(H+G)z_y + Hz_x] \left| \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right| \end{aligned} \quad (1.31)$$

Вычитая из второго первое равенство системы (1.29) и имея в виду (1.14), (1.24), приходим к результату

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{4\Delta} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left| \frac{(H+F)z_y + Hz_x}{D} \right| + \frac{2\Delta}{N} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left| \frac{(H+G)z_y + Hz_x}{D} \right| \right| + \\ + \frac{z}{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \left| \frac{(H-F)z_y + Hz_x}{D} \right| + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| + \frac{z}{\Delta} \left| \frac{\partial}{\partial y} \right| \left| \frac{(H+G)z_y + Hz_x}{D} \right| + \\ + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_{xy}}{D} \right) \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| + \frac{h}{2D\Delta} [(H-F)z_y + Hz_x] \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right| + \frac{2\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \\ + [(H+G)z_y + Hz_x] \left| \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right| + \frac{1}{2D\Delta} [(H+F)z_x + Hz_y] \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \\ + \frac{2\Delta}{N} z_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + [(H+G)z_y + Hz_x] \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 = Z^+ + Z^- \end{aligned}$$

Это и есть дифференциальное уравнение равновесия пластинки. Как и следовало ожидать, оно совпадает с уравнением равновесия, полу-

ченным традиционным способом теории пластинок, то есть способом рассмотрения равновесия моментов дифференциального элемента срединной плоскости.

2. Пусть пластинка переменной толщины h отнесена к системе цилиндрических координат r, ϑ, z . Материал является несжимаемым, идеально-пластическим и ортотропным. Его главные направления совпадают с направлениями координатных линий. Поведение материала описывается законом течения, ассоциированным с поверхностью текучести Мизеса-Хилла. Нагрузка пластинки вертикальная, граничные условия произвольны. Проведем выкладки, аналогичные выкладкам предыдущего пункта, для поперечных касательных и нормальных напряжений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} z_r = -\frac{h-2|z|}{2\Delta} \left| \frac{\sigma}{\sigma_r} \right| \left| \frac{(H-F)z_r + Hz_r}{D} \right| + \frac{\Delta}{N} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{z_{r\vartheta}}{D} \right) + \frac{1}{r} \frac{Fz_r - Gz_{\vartheta}}{D} \Big| \\ - \frac{1}{2D\Delta} \left| \{(H-F)z_r + Hz_r\} \left[\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\Delta}{N} z_{r\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \vartheta} \right] \right| \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} z_{\vartheta} = -\frac{h-2|z|}{2\Delta} \left| \frac{1}{r} \frac{\sigma}{\sigma_{\vartheta}} \right| \left| \frac{(H-G)z_r + Hz_r}{D} \right| + \frac{\Delta}{N} \frac{\sigma}{\sigma_r} \left(\frac{z_{r\vartheta}}{D} \right) + \frac{2\Delta}{N} \frac{1}{r} \frac{z_{r\vartheta}}{D} \Big| \\ - \frac{1}{2D\Delta} \left| \{(H-G)z_r + Hz_r\} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + \frac{\Delta}{N} z_{r\vartheta} \frac{\partial h}{\partial r} \right] \right| \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} z_z = \frac{Z-Z_0}{2} - \frac{z(|z|-h)}{2\Delta} \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right| \left| \frac{(H-F)z_r + Hz_r}{D} \right| - \frac{2\Delta}{Nr} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} \left(\frac{z_{r\vartheta}}{D} \right) + \\ + \frac{1}{Dr} \frac{\partial}{\partial r} (Fz_r - Gz_{\vartheta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{(H-F)z_r + Hz_r}{D} \right| + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \left| \frac{(H-G)z_r + Hz_r}{D} \right| + \\ + \frac{2\Delta}{Nr^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{z_{r\vartheta}}{D} \right) + \frac{z}{\Delta} \left| \frac{\sigma}{\sigma_r} \right| \left| \frac{(H+F)z_r + Hz_r}{D} \right| - \frac{\Delta}{N} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{z_{r\vartheta}}{D} \right) + \frac{Fz_r - Gz_{\vartheta}}{2rD} \Big| \\ (2.3) \\ + \frac{1}{2rD} \left| \{(H+F)z_r + Hz_r\} \left[\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{z}{\Delta} \left| \frac{1}{r} \frac{\sigma}{\sigma_{\vartheta}} \right| \frac{(H+G)z_r + Hz_r}{D} \right] + \frac{\Delta}{N} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z_{r\vartheta}}{D} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{N} \frac{1}{r} \frac{z_{r\vartheta}}{D} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + \frac{z}{2D\Delta} \left| \{(H+F)z_r + Hz_r\} \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} - \frac{2\Delta}{N} z_{r\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \vartheta} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \{(H+G)z_r + Hz_r\} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \vartheta^2} \right] \right\} \right| \end{aligned}$$

Здесь z_r, z_{ϑ} и $z_{r\vartheta}$ — скорости изменения кривизн срединной плоскости пластинки, которые выражаются через скорости притока по формулам [2]

$$z_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad z_{\vartheta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right), \quad z_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right)$$

Дифференциальное уравнение равновесия пластинки имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{(H+F)z_r + Hz_0}{D} \right) \right] + \frac{1}{Nr} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{z_{r\theta}}{D} \right) + \frac{1}{Dr\Delta} \frac{\partial}{\partial r} (Fz_r - Hz_0) + \\ & + \frac{1}{r\Delta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(H-F)z_r + Hz_0}{D} \right] + \frac{1}{r^2\Delta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{(H+G)z_\theta + Hz_r}{D} \right] + \frac{1}{Nr^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{z_{r\theta}}{D} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{2h}{\Delta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(H-F)z_r + Hz_0}{D} \right] + \frac{h}{Nr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z_{r\theta}}{D} \right) - \frac{h}{r\Delta} (Fz_r - Hz_0) \right] + \\ & + \frac{h}{Dr\Delta} [(H+F)z_r + Hz_0] + \frac{1}{D\Delta} [(H-F)z_r + Hz_0] \frac{\partial}{\partial r} + \frac{z_r}{2Nr\Delta} \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{2h}{r\Delta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{(H+G)z_\theta + Hz_r}{D} \right] + \frac{h}{N} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{z_{r\theta}}{D} \right) - \frac{h}{Nr} \frac{z_r}{D} \right] + \quad (2.5) \\ & + \frac{1}{D\Delta} [(H+G)z_\theta + Hz_r] \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{1}{2N} \frac{z_\theta}{D} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{h}{2D\Delta} [(H+F)z_r + Hz_0] \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \\ & + \frac{h}{2\Delta D} z_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \theta} + \frac{h}{2r^2\Delta D} [(H+G)z_\theta + Hz_r] \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = Z'' - Z' \end{aligned}$$

ON DETERMINATION OF STRESSES OF CROSS DIRECTION FOR VARIABLE THICKNESS ORTHOTROPIC IDEAL-PLASTIC PLATES

R. M. KRAKOSIAN

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ԻՐԵԱՎԱԿԱՆ ՊԼԱՍՏԻԿ ՍԵՐՈՐԻ ՀԱՅՆԱԿԱՆ
ՈՐՂՂՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՈՒՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Մ. ԿՐԱԿՈՍԻԱՆ

И с т и ф и к а т

Մոման դասական տեսության լուծումների հիման վրա արտածվում են փոփոխական հաստության ուղղադիրձ և գլանային քրթնորոշ իղեալական պլաստիկ սալերի լայնական շոշափուղ և նորմալ լարումների բանաձևերը: Այդ բանաձևերը կարող են օգտակար լինել լայնական ուղղությամբ ամրության վատ հատկությամբ օժտված ժամանակակից նյութերից պատրաստված սալերի օպտիմալ նախագծերը գնահատելիս:

ЛИТЕРАТУРА

1. Матчик Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.—М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
2. Ахбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.—М.: Наука, 1987. 360 с.
3. Раховский Н. А. Курс дифференциальной геометрии.—М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
17.III.1989