ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 2, 1990 Механика

УДК 539.375

ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С КЛИНОВИДНЫМ ВЫРЕЗОМ

ЛЕБЕДЕВ Д. Ф.

Рассматривается упругая составная плоскость, ослабленная бесконечным клиновидным вырезом. К краям выреза осевой силой прижат без трения жесткий штамп в форме клина.

Устанавливается асимптотика напряженного состояния в окрестности вершины выреза, а также под краем штампа. Разрушающая нагрузка определяется по критерию хрупкой прочности В. В. Новожилова.

Строятся системы кусочно-однородных решений (P—системы) двух смешанных симметричных задач для бесконечного упругого клина. В рядах по элементам этих систем могут быть решены различные задачи об обжатии произвольным числом штампов однородных и составных, усеченных, конечных и бесконечных клиновидных областей; о равновесии однородной и составной бесконечной плоскости, ослабленной системой радиальных пунктирных разрезов, при условиях циклической симметрии.

P—системы для бесконечного упругого конуса построены в [1].

1. Рассмотрим две краевые задачи а) и б) о плоской деформации бесконечного упругого клина $\{0\leq r<\infty,\ -\alpha\leq\theta\leq\alpha\}$ с общим основным условием

$$\tau_{r\theta}(r, \pm\alpha)=0 \quad (0\leq r<\infty) \tag{1.1}$$

и со смешанными условиями:

$$\text{а)}\quad \sigma_\theta(r, \pm\alpha)=f_1(r)\ (0\leq r<1),\quad v(r, \pm\alpha)=\pm g_1(r)\ (1\leq r<\infty) \tag{1.2}$$

$$\text{б)}\quad \sigma_\theta(r, \pm\alpha)=f_2(r)\ (1<r<\infty),\quad v(r, \pm\alpha)=\pm g_2(r)\ (0\leq r\leq 1)$$

Их решение с учетом симметрии граничных условий и однородного условия (1.1) запишем в виде интеграла Меллина [1, 2, 3]:

$$w(r, \theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} B_j(\nu)W(\nu, \theta)r^{-\nu}d\nu,\quad w=(u, v),\quad W=(U, V) \tag{1.3}$$

$$U(\nu, \theta)=(2G)^{-1}(\nu, \alpha)[(\nu+\varkappa)\sin(\nu-1)\alpha\cos(\nu+1)\theta-$$
$$-(\nu+1)\sin(\nu+1)\alpha\cos(\nu-1)\theta]$$

$$V(\nu, \theta) = (2G)^{-1}\nu(\nu+\varkappa)[(\nu-\varkappa)\sin(\nu-1)\alpha\sin(\nu+1)\theta -$$

$$-(\nu+1)\sin(\nu-1)\alpha\sin(\nu-1)\theta]$$

$$\rho(r, \nu) = r^{\nu}, \quad \varkappa = 3-4\mu$$

где w — вектор перемещений, $u=u(r, \theta)$ — радиальное, $v=v(r, \theta)$ — угловое перемещение; r, θ — полярные координаты; W — вектор трансформант U и V перемещений u и v соответственно; G — модуль сдвига, μ — коэффициент Пуассона, ν — параметр преобразования Меллина; индексы $j=1$ (задача а)), $j=2$ (задача б)); контуры L_1 и L_2 — прямые $\mathrm{Re}\,\nu=\gamma_1$ и $\mathrm{Re}\,\nu=\gamma_2$ (располагаются соответственно правее (левее) мнимой оси, но левее (правее) ближайшего полюса подынтегральных функций).

Из условий (1.2) получим, что функция $B_j(\nu)$ удовлетворяет двум уравнениям

$$v^{+}(\nu)+v^{-}(\nu) = B_j(\nu)D_1(\nu), \quad \sigma^{+}(\nu)+\sigma^{-}(\nu)=B_j(\nu)D_2(\nu) \quad (\nu\in L_j) \tag{1.4}$$

$$D_1(\nu) = -(2G)^{-1}4(1-\mu)\nu(\nu+\varkappa)\sin(\nu-1)\alpha\sin(\nu+1)\alpha$$

$$D_2(\nu) = -\nu^2(\nu+\varkappa)(\nu\sin 2\alpha+\sin 2\nu\alpha)$$

$$v^{+}(\nu) = \int_0^1 v(r, \alpha)\rho(r, \nu-1)\,dr, \quad v^{-}(\nu) = \int_1^{\infty} v(r, \alpha)\rho(r, \nu-1)\,dr$$

$$\sigma^{+}(\nu) = \int_0^1 \sigma_\theta(r, \alpha)\rho(r, \nu)\,dr, \quad \sigma^{-}(\nu) = \int_1^{\infty} \sigma_\theta(r, \alpha)\rho(r, \nu)\,dr$$

Исключив $B_j(\nu)$ из (1.4), приходим к задаче Римана [4]

$$v^{+}(\nu)+v^{-}(\nu)=K(\nu)[\sigma^{+}(\nu)+\sigma^{-}(\nu)], \quad K(\nu)=D_1(\nu)D_2^{-1}(\nu) \quad (\nu\in L_j) \tag{1.5}$$

относительно неизвестных $v^{+}(\nu)$, $\sigma^{-}(\nu)$ и $v^{-}(\nu)$, $\sigma^{+}(\nu)$ при $j=1$ и $j=2$ соответственно.

Следуя [1, 3], построим каноническое решение однородной задачи Римана

$$v_0^{+}(\nu)=K(\nu)\sigma_0^{-}(\nu)$$

в виде произведения решений задач с коэффициентами $K_s(\nu)$ ($s=1, 2$)

$$v_s^{+}(\nu)=K_s(\nu)\sigma_s^{-}(\nu) \quad (\nu\in L_1), \quad v_s^{-}(\nu)=K_s(\nu)\sigma_s^{+}(\nu) \quad (\nu\in L_2) \tag{1.6}$$

$$K_1(\nu)=-g\nu^{-1}\operatorname{tg}^{-1}\pi\nu, \quad g=(1-\mu)G^{-1}$$

$$K_2(\nu)=K(\nu)K_1^{-1}(\nu)=\frac{2(\sin^2\alpha-\sin^2\nu\alpha)}{\nu\sin 2\alpha+\sin 2\nu\alpha}\operatorname{tg}\pi\nu$$

Мероморфная функция $K_2(\nu)$, как следует из анализа нулей характеристических функций $D_j(\nu)$ не имеет нулей и полюсов внутри полосы $\lambda_2 \leqslant \mathrm{Re}\,\nu \leqslant \lambda_1$; на мнимой оси $\nu = i\beta$ она вещественна и четна:

$$K_2(i\beta) = 2(\mathrm{sh}^2\beta\alpha + \sin^2\alpha)\,\mathrm{th}\,\pi\beta\,(\beta\sin 2\alpha + \mathrm{sh}\,2\beta\alpha)^{-1}$$

$$K_2(i\beta) = 1 + O(\beta\exp(-2|\beta|\alpha)) \quad (\beta \to \pm\infty)$$

Сместив контуры сопряжения L_j на мнимую ось, получим решение задач (1.6) при $s=2$ в виде

$$v_2^+(\nu) = Y(\nu)\ (\mathrm{Re}\,\nu \geqslant \lambda_1), \quad v_2^-(\nu) = Y^{-1}(\nu)\ (\mathrm{Re}\,\nu \leqslant \lambda_2) \tag{1.7}$$

$$Y(\nu) = \exp\left[\frac{\nu}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln K_2(it)\,dt}{t^2+\nu^2}\right] \quad (\mathrm{Re}\,\nu > 0) \tag{1.8}$$

При $s=1$ задачи (1.6) решаются элементарно:

$$v_1^+(\nu) = g\nu^{-1/2}\Gamma(\nu+1)\Gamma^{-1}(\nu+1/2)\ (\mathrm{Re}\,\nu \geqslant \lambda_1) \tag{1.9}$$

$$v_1^-(\nu) = g\nu^{-1/2}\Gamma(-\nu+1)\Gamma^{-1}(-\nu+1/2)\ (\mathrm{Re}\,\nu \leqslant \lambda_2)$$

Для неизвестных $v_0(\nu)$ будем иметь

$$v_0^+(\nu) = v_1^+(\nu)Y(\nu)\ (\mathrm{Re}\,\nu \geqslant \lambda_1), \quad v_0^-(\nu) = v_1^-(\nu)Y^{-1}(\nu)\ (\mathrm{Re}\,\nu \leqslant \lambda_2) \tag{1.10}$$

Решение неоднородных задач (1.5) найдем для функций (1.2) следующего вида:

$$f_j(r) = C_j\varphi(r, -\gamma_j - 1), \quad g_j(r) = E_j\varphi(r, -\delta_j) \quad (j = 1,\ 2) \tag{1.11}$$

$$\mathrm{Re}\,\gamma_1 < -1, \quad \mathrm{Re}\,\delta_1 > \lambda_1, \quad \mathrm{Re}\,\gamma_2 > \lambda_2, \quad \mathrm{Re}\,\delta_2 < \lambda_2$$

Их трансформанты равны

$$v^+(\nu) = C_1(\nu-\gamma_1)^{-1}, \quad v^-(\nu) = -E_1(\nu-\delta_1)^{-1} \quad (j=1)$$

$$v^-(\nu) = -C_2(\nu-\gamma_2)^{-1}, \quad v^+(\nu) = E_2(\nu-\delta_2)^{-1} \quad (j=2)$$

По обобщенной теореме Лиувилля получим

$$v^\pm(\nu) = \pm\frac{E_j}{\nu-\delta_j} \pm v_0^\pm(\nu)\left[\frac{C_jK(\gamma_j)}{(\nu-\gamma_j)v_0^\mp(\gamma_j)} - \frac{E_j}{(\nu-\delta_j)v_0^\pm(\delta_j)} + \delta_{j1}d + \delta_{j2}e\right] \tag{1.12}$$

Здесь верхний (нижний) знак соответствует $j=1$ ($j=2$); d и e — произвольные постоянные, которые появляются из условия ограниченности энергии упругих напряжений в окрестности точки $r=1$, $n=1, 2$; δ_{jn} — символ Кронекера.

Таким образом, решение вспомогательной задачи (1.1), (1.2) выражается однократными квадратурами (1.3), где

$$B_j(\nu) = \pm\frac{v_0^\pm(\nu)}{D_1(\nu)}\left[\frac{C_jK(\gamma_j)}{(\nu-\gamma_j)v_0^\mp(\gamma_j)} - \frac{E_j}{(\nu-\delta_j)v_0^\pm(\delta_j)} + \delta_{j1}d + \delta_{j2}e\right] \tag{1.13}$$

2. Пусть $w^k_{jm}=(u^k_{jm}, v^k_{jm})$ — k-й вектор упругих перемещений (k-й элемент) P-системы j-й задачи (1.1), (1.2) при значениях $f_j(r)=0$, $g_j(r)=0$, с особенностями в точках $r=0$ ($m=1$) или $r=\infty$ ($m=2$); $w^{k1}_{jm}=(u^{k1}_{jm}, v^{k1}_{jm})$ — k-й вектор перемещений (k-й элемент) системы однородных решений (H-системы), имеющих особенности в тех же точках, удовлетворяющих общему условию (1.1) и основным условиям $\sigma_\theta(r,\pm\alpha)=0$, $j=m$; $\tau(r,\pm\alpha)=0$, $j\neq m$ ($j, m=1,2$; $0\leqslant r<\infty$).

Полагаем

$$w^k_{jm}=w^{k1}_{jm}+w^{k2}_{jm} \tag{2.1}$$

где w^{k2}_{jm} — корректирующий вектор из k-го элемента Γ-системы.

Элементы H-систем запишем в виде

$$w^{k1}_{jm}(r,\theta)=A^k_{jm}W(\nu^k_{jm},\theta)\psi(r,-\nu^k_{jm}) \tag{2.2}$$

где A^k_{jm} — произвольные постоянные, ν^k_{jm} — нули функций $D_s(\nu)$, $s=1+\delta_{jm}$, $\mathrm{Re}\,\nu^k_{j1}>0$, $\mathrm{Re}\,\nu^k_{j2}<0$.

Все нули $D_1(\nu)$ — вещественные:

$$\nu^k_{11}=\{\nu^{k1}_{11}=\nu_k=k\pi\alpha^{-1}+1,\quad \nu^{k2}_{11}=\nu_k-2,\quad k=1, 2, \ldots\}$$

$$\nu^k_{12}=\{\nu^{k1}_{12}=-\nu^{k1}_{11},\ \nu^{k2}_{12}=-\nu^{k2}_{11},\ k=1, 2, \ldots\};\ \nu^0_{11}=\nu^0_{12}=0,\ k=0$$

$$\nu^k_{12}=\nu^{k1}_{12}=-\nu^{k1}_{11}=-\nu^k_{11}=-1,\ k=-1$$

Нули функции $D_2(\nu)$ исследовались, к примеру, в статьях [5,6,7]. В [6] установлена асимптотика комплексных нулей ($0<2\alpha<2\pi$). Графики зависимостей нескольких первых нулей от величины угла 2α приведены в [7]. В [5] обычным приемом отделения вещественной и мнимой частей комплексной функции аналитически исследованы комплексные нули нечетной функции ($0<2\alpha<\pi$)

$$\Phi(z)=\sin z+z\sin 2\alpha/2\alpha,\quad z=2\nu\alpha$$

В дополнение к [5] отметим, что, если угол $2\alpha\in(0;\ 0,8128\,\pi)$, то $\Phi(z)$ в правой полуплоскости ($\xi>0$) имеет только комплексно сопряженные нули $z_k=\xi_k\pm i\eta_k$, $\xi_k\in((2k-1)\pi,\ (4k-1)\pi/2)$, $k=1, 2, \ldots$ С ростом угла комплексно-сопряженные нули поочередно (от меньших номеров к большим) сходятся, образуя, начиная с $2\alpha=0,8128\pi$, вещественные двукратные нули. При увеличении угла $2\alpha\in(0,8128\pi;\ \pi)$, эти нули расходятся в простые вещественные (пары): $\xi^{(1)}_k=(2k-1)\pi+\varepsilon$, $\xi^{(2)}_k=2k\pi-\varepsilon$, $0\leqslant\varepsilon<\pi/2$. При $2\alpha=\pi$ все нули функции $\Phi(z)$ становятся вещественными. С ростом угла в промежутке (π; $1,1512\,\pi$) простые вещественные нули $\xi^{(2)}_k=2k\pi+\varepsilon$, $\xi^{(1)}_k=(2k+1)\pi-\varepsilon$ попарно сходятся, образуя поочередно (от больших номеров к меньшим) двукратные вещественные нули, которые затем переходят в комплексно сопряженные. При $2\alpha\in(1,1512\pi;\ 1,7575\pi)$ все нули функции $\Phi(z)$ в правой полуплоскости, кроме ξ_{-1}, — комплексно сопряженные, причем $\xi_k\in(2k\pi;$

$(4k+1)\pi/2$). В промежутке $[1{,}7506\pi;\ 2\pi)$ комплексно сопряженные нули поочередно (от меньших номеров к большим) переходят в двукратные вещественные и затем в пары вещественных: $\xi_k^{(1)}=2k\pi-\varepsilon$, $\xi_k^{(2)}=(2k-1)\pi-\varepsilon$. Вещественный нуль $\xi_{-1}\in(0{,}8128\pi;\ \pi)$ соответствует значениям угла $\pi<2\alpha<2\pi$ и определяет порядок сингулярности напряжений в вершине клина.

Список нулей функции $D_2(\nu)$ представим в виде ($2\alpha\neq\pi$)

$$\nu_{21}^k=\left\{\nu_{21}^{k1}=\frac{\pi k}{2\alpha}-\frac{\xi_k}{2\alpha}+i\frac{\eta_k}{2\alpha},\quad \nu_{21}^{k2}=\bar{\nu}_{21}^{k1},\quad k=1,2,\dots\right\}$$

$$\nu_{22}^k=\{\nu_{22}^{k1}=-\nu_{21}^{k1},\ \nu_{22}^{k2}=-\nu_{21}^{k2},\ k=1,2,\dots\},\quad \nu_{21}^0=\nu_{22}^0=0,\ k=0$$

$$\nu_{21}^{-1}=\nu_{21}^{-1}=-\nu_{22}^{-1}=\xi_{-1}/2\alpha<1,\quad k=-1$$

Для пары вещественных нулей считаем, что $\nu_{21}^{k1}\le\nu_{21}^{k2}$.

Корректирующие векторы w_{jm}^{k} являются решениями четырех смешанных неоднородных задач (1.1), (1.2), где

$$f_1(r)=0,\quad g_1(r)=-A_{11}^kD_1(\nu_{21}^k)\rho(r,-\nu_{21}^k) \tag{2.3}$$

$$f_2(r)=-A_{21}^kD_2(\nu_{11}^k)\rho(r,-\nu_{11}^k-1),\quad g_2(r)=0\ (k=-1,1,2,\dots;\ m=1)$$

$$f_1(r)=-A_{12}^kD_2(\nu_{12}^k)\rho(r,-\nu_{12}^k-1),\quad g_1(r)=0$$

$$f_2(r)=0,\quad g_2(r)=-A_{22}^kD_1(\nu_{22}^k)\rho(r,-\nu_{22}^k)\quad (k=-1,1,2,\dots;\ m=2)$$

Используя зависимости (1.3), (1.13), получим

$$w_{jm}^{k}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j}B_{jm}^k(\nu)W(\nu,\theta)\rho(r,-\nu)\,d\nu \tag{2.4}$$

$$B_{jm}^k(\nu)=(-1)^jA_{jm}^kv_j^*(\nu)D_1^{-1}(\nu)R_{jm}^k(\nu)$$

$$R_{jm}^k(\nu)=\frac{(1-\delta_{jm})D_2(\nu_{1m}^k)}{(\nu-\nu_{1m}^k)v_j^*(\nu_{1m}^k)}-\frac{\delta_{jm}D_1(\nu_{2m}^k)}{(\nu-\nu_{2m}^k)v_j^*(\nu_{2m}^k)}-\delta_{j1}d_m^k+\delta_{j2}e_m^k$$

$$v_j(\nu)=\delta_{j1}v_0^+(\nu)+\delta_{j2}v_0^-(\nu),\quad v_j^*(\nu)=\delta_{j1}v_0^-(\nu)+\delta_{j2}v_0^+(\nu)$$

Произвольные постоянные d_m^k, e_m^k найдем из условия самоуравновешенности напряженного состояния, порождаемого каждым элементом P-систем при значениях радиуса $r<1$ ($j=1$) и $r>1$ ($j=2$). Для выполнения этого условия необходимо положить $R_{jm}^k(\nu_m^k)=0$. Откуда следует

$$\delta_{j1}d_m^k+\delta_{j2}e_m^k=\frac{(1-\delta_{jm})D_2(\nu_{1m}^k)}{\nu_{1m}^kv_j^*(\nu_{1m}^k)}-\frac{\delta_{jm}D_1(\nu_{2m}^k)}{\nu_{2m}^kv_j^*(\nu_{2m}^k)} \tag{2.5}$$

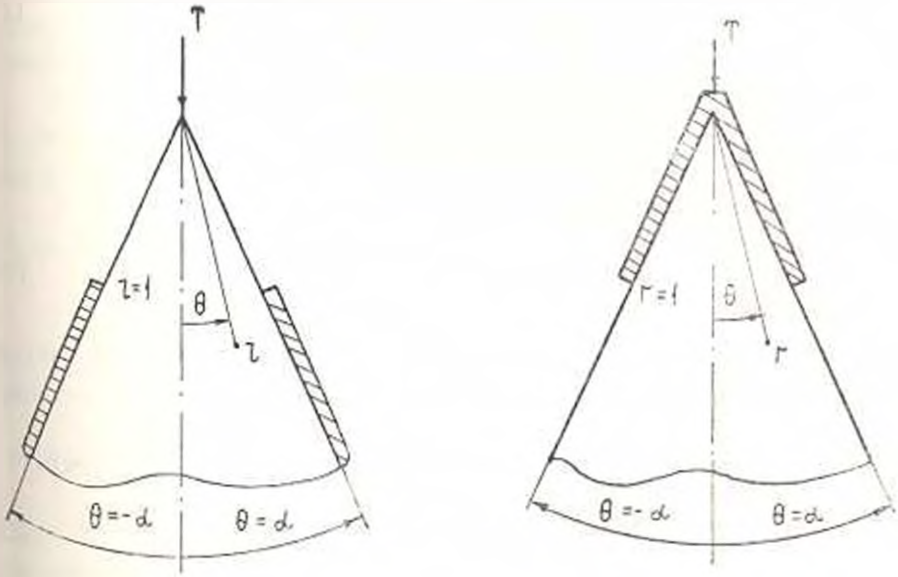
($k=-1,1,2,\dots;\ j,m=1,2$)

В P-системы $\{w_{jm}^k\}$, $\{w_{jm}^{*k}\}$ не входят элементы с номером $k=0$, поскольку их главная часть (соответствующие элементы H-систем) обращается в нуль. Векторы w^0_{12}, w^0_{21} являются решениями однородных задач (1.1), (1.2,а) и (1.1), (1.2,б) (фиг. 1, 2) с отличным от нуля главным вектором напряжений при $r<1$ ($j=1$) и $r>1$ ($j=2$). Они получаются из соотношений для w^k_{jm} ($j, m = 1, 2;\ j \neq m$) при $\lambda^k_{12}=\lambda^k_{21}=0$, $k=0$ и имеют вид:

$$w^0_{jm}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} B^0_{jm}(\nu)W(\nu,\theta)r^{-\nu}d\nu \qquad (2.6)$$

$$B^0_{jm}(\nu)=\sigma_j(\nu)D^{-1}(\nu)(\delta_{1j}d^0_m+\delta_{2j}e^0_m)$$

$$\delta_{1j}d^0_m+\delta_{2j}e^0_m=(-1)^jT[2(\sin 2\alpha+2\alpha)]^{-1}$$



Фиг. 1 Фиг. 2

В контактных задачах для клина в случае нескольких точек раздела граничных условий возникает вопрос о возможности их физической реализации. В этой связи рассмотрим вектор w^k_{12}, $k=-1$. Его главная часть характеризует однородное растяжение в катете клина, а сам вектор определяет на бесконечности поле постоянных напряжений σ^*_r. В указанных задачах необходимо задать некоторое значение $\sigma^*_r<0$ и учесть в решении элемент w^{-1}_{12} с коэффициентом $A^k_{12}=\sigma^*_r[4(1-2\mu)]^{-1}$ ($2\alpha\neq\pi$, $k=-1$).

Двукратным собственным числам $\lambda^{k1}_{21}=\lambda^{k2}_{21}$ соответствуют два однородных решения, одно из которых содержит функцию $\ln r$ и не удовлетворяет соотношению обобщенной ортогональности для секториальной области. Это осложняет применение метода кусочно-однородных решений к составным клиновидным областям, если линия сопряжения $r=\mathrm{const}$, $-\alpha\leqslant\vartheta\leqslant\alpha$ выходит на грани клина, свободные от нормальных напряжений σ_ϑ. Практически этих осложнений можно избежать, приняв во внимание свойства собственных чисел $\nu^{k}_{21}=\nu^{k}_{11}$: они существуют не при всех значениях угла 2α, в единственном числе $(2\alpha=\pi)$ и при сколь угодно малом изменении угла переходят в пары простых (вещественные либо комплексно сопряженные). В дальнейшем, если $2\alpha>\pi$, полагаем $\nu^{k}_{21}=\nu^{k}_{21}(\nu^{k}_{21})$.

Заключая построение P-систем, разложим входящие в их элементы контурные интегралы в ряды по однородным решениям. Учитывая соотношение $\sigma^{*}_{j}(\nu)=D_1(\nu)D_2^{-1}(\nu)\sigma^{*}_{j}(\nu)$, получим $(k=-1,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

$$w^{k}_{jm}(r_q,\vartheta)=A^{k}_{jm}[(1-\delta_{qm})W(\nu^{k}_{jm},\vartheta)s(r_{q*}-\nu^{k}_{jm})+$$

$$+(-1)^{q}\sum_{n=-1}^{\infty}C^{kq}_{jm}(\nu^{n}_{pq})W(\nu^{n}_{pq},\vartheta)s(r_{q*}-\nu^{n}_{pq})] \tag{2.7}$$

$$C^{kq}_{jm}(\nu)=(-1)^{j}[\delta_{j1}\sigma^{*}_{j}(\nu)+\delta_{j2}\tau_{j}(\nu)]D_p^{-1}(\nu)R^{k}_{jm}(\nu)$$

$$(q=1,2;\quad r_1>1,\quad r_2<1,\quad p=2-\delta_{1q},\quad s=1+\delta_{jm})$$

При $n=0$, $j\neq q$ имеем $(\nu^{0}_{21}=\nu^{0}_{12})$

$$C^{kq}_{jm}(\nu^{0}_{21})=(-1)^{j}\frac{R^{k}_{jm}(\nu^{0}_{21})}{\varkappa\sin\alpha\, 2(\sin 2\alpha-2\alpha)} \tag{2.8}$$

функцию $W(\nu^{0}_{21},\vartheta)$ следует заменить на $\dot W(\nu^{0}_{21},\vartheta)$ (точка означает дифференцирование по ν). Если $j=q$, слагаемые номера $n=0$ отсутствуют.

Векторы (2.6) также представим в виде $(j,\ m=1,\ 2;\ j\neq m)$

$$w^{0}_{jm}(r_q,\vartheta)=(-1)^{q}\sum_{n=-1}^{\infty}C^{0q}_{jm}(\nu^{n}_{pq})W(\nu^{n}_{pq},\vartheta)s(r_{q*}-\nu^{n}_{pq}) \tag{2.9}$$

$$C^{0q}_{jm}(\nu)=[\delta_{j1}\sigma^{*}_{j}(\nu)+\delta_{j2}\tau_{j}(\nu)]D_p^{-1}(\nu)(\delta_{j1}d^{0}_{2}+\delta_{j2}e^{0}_{1})$$

При $j=q$ и $n=0$ имеем слагаемые $(\nu=\nu^{0}_{21})$

$$(-1)^{q}3\{\sigma^{*}_{j}(\nu)[(W(\nu,\vartheta)s(r_{q*}-\nu))^{\cdot\cdot}-2\varkappa^{-1}(W(\nu,\vartheta)s(r_{q*}-\nu))^{\cdot}]+$$

$$+2\sigma^{*}_{j}(\nu)(W(\nu,\vartheta)s(r_{q*}-\nu))^{\cdot}\}D_2^{-1}(\nu)(\delta_{j1}d^{0}_{2}+\delta_{j2}e^{0}_{1})$$

Здесь первый член соответствует решению Митчелла, второй и третий—смещению клина как жесткого тела.

3. Рассмотрим упругую плоскость с бесконечным клиновидным вырезом (фиг. 3), составленную из двух однородных областей $\Omega_1\{0\leqslant r<a,\ -\alpha\leqslant\vartheta\leqslant\alpha,\ 2\alpha>\pi\}$ и $\Omega_2\{a\leqslant r<\infty,\ -\alpha\leqslant\vartheta\leqslant\alpha\}$ (упругие постоянные—G_k, ν_k, $k=1,2$). К граням выреза на участке $b\leqslant r\leqslant 1$ осевой силой T прижат без трения жесткий клиновидный штамп. На этих гранях выполняются смешанные краевые условия

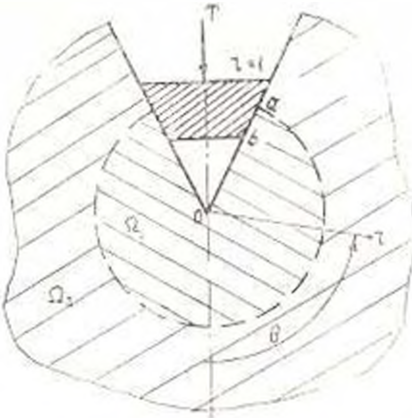
$$\tau_{r\theta}(r, \pm\alpha)=0 \quad (0<r<\infty) \tag{3.1}$$

$$u(r, \pm\alpha)=0 \quad (0<r<b, \; 1<r<\infty)$$

$$\sigma(r, \pm\alpha)=0 \quad (b<r\leqslant 1)$$

а на поверхности $r=a<1$, $a>b$; $-\alpha<\theta<\alpha$ — основные условия полного сцепления областей Ω_1 и Ω_2

$$u^1=u^2, \; v^1=v^2, \; \tau^1_{r\theta}=\tau^2_{r\theta}, \; \sigma^1_r=\sigma^2_r \tag{3.2}$$



Фиг. 3

Взяв решение в виде

$$w^1=\sum_{k=-1}^{\infty}{}' w^k_{12}, \quad w^2=w^0_{21}+\sum_{k=-1}^{\infty}{}' w^k_{21} \tag{3.3}$$

удовлетворим условиям (3.1) (штрих означает пропуск $k=0$).

Функции w^k_{12} и w^k_{21} согласно формулам (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) и принятому в п. 2 обозначению собственных чисел ν^k_{jm}, представим в виде $(j, m=1, 2; \; j\neq m)$

$$w^k_{jm}(r, \theta)=\sum_{l=1}^{2} A^{kl}_{jm}\left[W(\nu^{kl}_{1m}, \theta)\varphi(r, -\nu^{kl}_{1m})+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} B^{kl}_{jm}(\nu)W(\nu, \theta)\varphi(r, -\nu)d\nu\right] \tag{3.4}$$

$$B^{kl}_{jm}(\nu)=(-1)^l A^{kl}_{jm}\sigma^*_j(\nu)D_1^{-1}(\nu)R^{kl}_{jm}(\nu) \quad (k=1, 2, \dots, \; l=1, 2; \; k=-1, \; l=1)$$

$$R^{kl}_{jm}(\nu)=\frac{D_2(\nu^{kl}_{1m})}{\sigma^*_j(\nu^{kl}_{1m})}\left(\frac{1}{\nu-\nu^{kl}_{1m}}+\frac{1}{\nu^{kl}_{1m}}\right)$$

Здесь A^{kl}_{12}, A^{kl}_{21} $(k=-1, 1, 2, \dots)$, A^{kl}_{12}, A^{kl}_{21} $(k=1, 2, \dots)$—произвольные постоянные.

Функцию w^0_{21} определим по формуле (2.6).

Элементы P-систем (2.1) построены в локальных координатах. Используемые в (3.3) элементы запишем в глобальных координатах, связав их с локальными координатами элементов w^k_{21} и w^0_{21}. Тогда, для перехода в элементах w^k_{12} к глобальным координатам необходимо заменить радиус r отношением r/b, G_1—произведением $G_1 b^\tau$; выражения для перемещений и напряжений умножить на масштабные коэффициенты b и $b^{-\tau}$ соответственно.

Подставим (3.3) в (3.2) и воспользуемся разложениями (2.7), (2.9) функций (3.4) и w^0_{21}, записанных в глобальных координатах (w^k_{12}—при $r_1=a/b>1$, w^k_{21}, w^0_{21}—при $r_2=a<1$). В двойных рядах по n и k поменяем порядки суммирования и введем неизвестные

$$Z^{kl}_{12}=A^{kl}_{12}\varphi(a/b, -\nu^{kl}_{12}+1), \quad Z^{kl}_{21}=A^{kl}_{21}\varphi(a, -\nu^{kl}_{11}+1) \; (l=1, 2) \tag{3.5}$$

Применяя к образовавшимся рядам условие ортогональности H-систем $\{w_{jm}^{kl}\}$ $(j, m=1, 2;\ j\neq m)$ в форме

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} U_i(\nu_{jm}^{kl}, \theta)Q_{ni}(\theta)d\theta=0 \quad (k\neq t,\ k=1, 2, \dots) \tag{3.6}$$

$$Q_{ni}(\theta)=\cos(\nu_n-1)\theta \ (i=1, 4), \quad Q_{ni}(\theta)=\sin(\nu_n-1)\theta \quad (i=2, 3)$$

$$U_1(\nu, \theta)=U(\nu, \theta), \quad U_2(\nu, \theta)=V(\nu, \theta), \quad \nu_n=2n-1$$

$$U_3(\nu, \theta)=\nu^2(\nu+1)(\nu+\varkappa)[\sin(\nu+1)\alpha\sin(\nu-1)\theta-\sin(\nu-1)\alpha\sin(\nu+1)\theta]$$

$$U_4(\nu, \theta)=\nu^2(\nu+\varkappa)[(\nu+1)\sin(\nu+1)\alpha\cos(\nu-1)\theta-(\nu+3)\sin(\nu-1)\alpha\cos(\nu+1)\theta]$$

получим нормальную систему Пуанкаре-Коха

$$\sum_{l=1}^{2}(\alpha_{kl}^{i}Z_{11}^{kl}+\beta_{kl}^{i}Z_{21}^{kl})+\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{nk1}^{i}Z_{12}^{n1}+\delta_{nk1}^{i}Z_{22}^{n1})+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{nk2}^{i}Z_{12}^{n2}+\delta_{nk2}^{i}Z_{22}^{n2})=\varepsilon_k^i \quad (k=1, 2, \dots;\ i=\overline{1, 4}) \tag{3.7}$$

$$\alpha_{kl}^{i}=I_{kl}^{i2}, \quad \beta_{kl}^{i}=-I_{kl}^{i1} \quad (l=1, 2)$$

$$\gamma_{nkl}^{i}=-\sum_{s=1}^{2}\rho(a/b, \nu_{12}^{nl}-\nu_{11}^{ks})S_{12}^{nl}(\nu_{11}^{ks})I_{ks}^{i1}$$

$$\delta_{nkl}^{i}=-\sum_{s=1}^{2}\rho(a, \nu_{21}^{nl}-\nu_{12}^{ks})S_{21}^{nl}(\nu_{12}^{ks})I_{ks}^{i2}$$

$$\varepsilon_k^i=\sum_{s=1}^{2}C_{2s}^{i}(\nu_{12}^{ks})\rho(a, -\nu_{12}^{ks}+1)I_{ks}^{i2}, \quad \varkappa_k=2-\delta_{1k}$$

$$I_{kl}^{im}=\int_{-\alpha}^{\alpha}U_i(\nu_{lm}^{kl}, \theta)Q_{ik}(\theta)d\theta, \quad S_{jm}^{nl}(\nu)=(-1)^{j}v_j(\nu)\dot{D}_1^{-1}(\nu)R_{jm}^{nl}(\nu)$$

$$(n=1, 2, \dots, \ l=1, 2;\ \ n=-1, \ l=1)$$

При $k=-1$ имеем в (3.7) две строки ($i=1, 4$); в интегралах I_{kl}^{im} полагаем $Q_{ik}(\theta)=1$; $\alpha_{k2}^{i}=\beta_{k2}^{i}=0$.

В интегралы I_{kl}^{im} из коэффициентов α_{kl}^{i}, γ_{nkl}^{i} $(l=1, 2)$ подставляем заданную величину G_1; в функциях $S_{12}^{nl}(\nu)$ заменяем G_1 на G_1b^2; коэффициенты β_{kl}^{i}, δ_{nkl}^{i} и ε_k^i зависят от упругих постоянных G_2, μ_2.

Внедиагональные элементы матрицы системы (3.7) убывают экспоненциально по номерам строк и столбцов. Для коэффициентов A_{12}^{kl}, A_{21}^{kl} имеют место оценки

$$|A_{12}^{kl}, A_{21}^{kl}|<k^{-1/2}\exp(-2\pi k\varkappa^{-1}L), \quad L=\min[\ln(a/b), \ln(1/a)] \tag{3.8}$$

Исследуем поведение перемещений и напряжений в окрестности угловой точки выреза, а также под краем штампа. Представим вектор перемещений из области Ω_1 — $w^1=(u^1, v^1)$ при $r<b$ в виде ряда по вычетам, взятым в нулях ν_{22}^n функции $D_2(\nu)$. На основании равенств (3.3), (3.4), (2.7), (2.9) будем иметь

$$\frac{u^1(r,\theta)}{\cos\theta} = -\frac{v^1(r,\theta)}{\sin\theta} = \frac{2(1-\nu_1)}{G_1 b\sqrt{2(\sin 2\alpha+2\alpha)}}\sum_{n=-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} A_{l2}^{n} R_{l2}^{n}(\nu_{22}^{n}) + O(r^{-c}), \quad r\to 0 \tag{3.9}$$

где $c=\nu_{22}^{1}\in(-0{,}5; -1)$, $n=-1$. Выражение в правой части равно вертикальному перемещению граней выреза.

Напряжения вблизи вершины неограниченно возрастают

$$\sigma_p^1(r,\theta) = -k r^{-c-1} U_p(c,\theta) + O(r^{-\epsilon-1}), \quad r\to 0 \tag{3.10}$$

$$k=b^{-1}\nu_2(c) D_2^{-1}(c)\sum_{n=-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} A_{l2}^{n} R_{l2}^{n}(c) \tag{3.11}$$

$$U_5(\nu,\theta)=\nu(\nu+\varkappa)[(\nu-1)\sin(\nu-1)\alpha\cos(\nu+1)\theta-(\nu+1)\sin(\nu+1)\alpha\cos(\nu-1)\theta]$$

Здесь σ_p ($p=3, 4, 5$) обозначают напряжения $\tau_{r\theta}$, σ_r и σ_θ соответственно; $\epsilon=\nu_{22}^{1}$ — ближний к c по величине действительной части нуль функции $D_2(\nu)$, $\mathrm{Re}\,\nu_{22}^{1}<-1$.

Асимптотика напряжений σ_θ под краем штампа имеет вид

$$\sigma_\theta^1(r,\pm\alpha)=K_I[2\pi(1-r)]^{-1/2}+O(1), \quad r\to 1-0 \tag{3.12}$$

$$K_I=-\sqrt{2}\left(\sum_{n=-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} A_{l1}^{n}\frac{D_2(\nu_{11}^{n})}{\nu_{11}^{n} D_0(\nu_{11}^{n})}+\frac{T}{\sqrt{\pi(\sin 2\alpha+2\alpha)}}\right) \tag{3.13}$$

Используя (3.8), нетрудно показать, что ряды в коэффициентах (3.11) и (3.13) сходятся абсолютно.

Разрушающую нагрузку T_* найдем, воспользовавшись асимптотикой напряжений (3.10) и критерием В. В. Новожилова [8, 9]

$$\int_0^d \sigma_\theta^1(r,0)\,dr \geqslant \sigma_c d \tag{3.14}$$

(d, σ_c — постоянные материала), который после подстановки $\sigma_\theta^1(r,0)$ примет вид

$$k = c d^{c+1} U_5^{-1}(c,0)\sigma_c \tag{3.15}$$

Если упругие постоянные областей Ω_1 и Ω_2 одинаковы, имеем решение задачи для однородной плоскости с клиновидным вырезом.

BRITTLE FRACTURE OF AN ELASTIC COMPOSITE PLANE WITH WEDGE CUT

D. I. LEBEDEV

ՍԵՊԱՁԵՎ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՓԼՈՒԶՄԱՆ ՔԱՅՔԱՅՈՒՄԸ

Վ. Ձ. ԼԵՎԻՆ

Դիտարկված է անվերջ սեպաձև կտրվածք ունեցող առաձգական բաղադրյալ հարթություն։ Կտրվածքի եզրերին տանգենցիալ ուժով տանգ չման ենթարկված է սեպի ներքով կոշտ դրոշմ։ Կտրվածքի գագաթի շրջակայքում գտնված է լարվածային վիճակի ասիմպտոտիկան։ Քայքայման բեռը որոշված է նախադրյալի փխրուն ամրության հայտանիշի օգնությամբ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лебедев Н. Ф., Нуллер Б. М.* Контактные задачи для составного упругого конуса.—Изв. АН СССР. МТТ, 1988, №6, с. 44—52.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967, 402 с.
3. *Лебедев Н. Ф., Нуллер Б. М.* Круглая плита переменной толщины на упругом полупространстве.—Изв. АН СССР. МТТ, 1976, №5, с. 39—44.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963, 640 с.
5. *Лурье А. И., Брачковский Б. З.* Решение плоской задачи теории упругости для клина.—Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1941, №3, с. 158—165.
6. *Нуллер Б. М.* Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина.—ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 157—163.
7. *Тер-Акопянц Л. Г.* О корнях характеристических уравнений упругого клина.—Вестник ЛГУ, 1983, №7, вып. 2, с. 116—118.
8. *Новожилов В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности.—ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, с. 213—222.
9. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984, 256 с.

Ленинградский политехнический
институт имени М. И. Калинина

Поступила в редакцию
10.I.1989