

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КРУГОВОГО СЕКТОРА

МАКАРЯН В. С., САРКИСЯН В. Г.

Рассмотрена плоская задача для упругого кругового сектора, когда на границе дуги окружности заданы нормальные нагрузки в виде симметричных сосредоточенных сил. На остальной части границы сектора заданы перемещения и нулевые касательные напряжения.

Решение задачи построено на основе классического интеграла Фурье и разложений по тригонометрическим функциям. Получено замкнутое решение задачи в явном виде. Для контактной задачи о вдавливании без трения двух симметричных клиновидных жестких тел на границы кругового сектора получены асимптотические представления напряжений у вершины сектора.

1. Как известно [1], решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах r, φ приводится к отысканию одной функции $\Phi(r, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right) = 0 \quad (1.1)$$

Компоненты напряжений и перемещений выражаются через функцию $\Phi(r, \varphi)$ следующими известными соотношениями:

$$\begin{aligned} z_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad z_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ z_{r\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \{ (1-\nu^2) z_r - (1+\nu) z_\varphi \} \\ \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{u_r}{r} &= \frac{1}{E} \{ (1-\nu^2) z_\varphi - \nu(1+\nu) z_r \} \end{aligned} \quad (1.2)$$

При решении граничных задач теории упругости в полярных координатах для конечных областей часто бывает удобным преобразование радиальной координаты r . Здесь введем это преобразование через соотношение $r = e^{\rho}$, после чего уравнение (1.1) и соотношения (1.2) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \rho^4} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^4} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0 \quad (1.3)$$

$$e^{-t}z_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial F}{\partial t} + F, \quad e^{-t}z_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\partial F}{\partial t}, \quad e^{-t}z_3 = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} \quad (1.4)$$

$$u_r = \frac{1-\nu^2}{E} \left[(\nu-1) \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt + (1-2\nu)F + \nu \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \nu \sin \varphi + \gamma \cos \varphi$$

$$u_z = \frac{1-\nu^2}{E} \left[\int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\partial F}{\partial t} - F \right) dz + \int \left[F t dt dz + \int \frac{\partial F}{\partial z} dt - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial F}{\partial z} \right] \right] + a_0 e^{-t}$$

В (1.3) и (1.4) $F(t, \varphi) = e^t \Phi(e^{-t}, \varphi)$, a_0, α, γ — произвольные постоянные интегрирования, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Функцию $F(t, \varphi)$ для кругового сектора ($0 \leq r \leq 1$, $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$) при наличии одной оси симметрии ($\varphi = 0$) представим в виде суммы тригонометрического ряда и интеграла Фурье

$$F(t, \varphi) = a e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k e^{-z_k t}) \exp(-(z_k - 1)t) \cos z_k t +$$

$$+ \int_0^{\varphi_0} [A(\varphi) \operatorname{sh} z \varphi \sin \varphi + B(\varphi) \operatorname{ch} z \varphi \cos \varphi] \cos z t dt, \quad z_k = \frac{k\pi}{2\varphi_0} \quad (1.5)$$

Для компонент напряжений и перемещений с учетом (1.4) получим следующие формулы:

$$e^{-t}z_1 = 2a e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} [(z_k - z_k^2) a_k \exp(-(z_k - 1)t) +$$

$$+ (2 - z_k - z_k^2) b_k \exp(-(z_k + 1)t)] \cos z_k \varphi + \int_0^{\varphi_0} [z A(\varphi) \operatorname{sh} \varphi \sin \varphi +$$

$$+ B(\varphi) \operatorname{ch} \varphi \cos \varphi] \sin z t dt + \int_0^{\varphi_0} \{A(\varphi) [z^2 \operatorname{sh} \varphi \sin \varphi + 2z \operatorname{ch} \varphi \cos \varphi] +$$

$$+ B(\varphi) [z^2 \operatorname{ch} \varphi \cos \varphi - 2z \operatorname{sh} \varphi \sin \varphi]\} \cos z t dt \quad (1.6)$$

$$e^{-t}z_2 = 2a e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k (z_k^2 - z_k) \exp(-(z_k - 1)t) +$$

$$+ (a_k^2 + 3z_k + 2) b_k \exp(-(z_k + 1)t)] \cos z_k \varphi +$$

$$+ \int_0^{\varphi_0} [z A(\varphi) \operatorname{sh} z \varphi \sin \varphi + B(\varphi) \operatorname{ch} z \varphi \cos \varphi] (\sin z t - \cos z t) dz$$

$$e^{-t}z_3 = \sum_{k=1}^{\infty} z_k [(z_k - 1) a_k \exp(-(z_k - 1)t) + (z_k + 1) b_k \exp(-(z_k + 1)t)] \sin z_k \varphi +$$

$$+ \int_0^{\varphi_0} [A(\varphi) (z \operatorname{ch} z \varphi \sin \varphi + \operatorname{sh} \varphi \cos \varphi) + B(\varphi) (z \operatorname{sh} z \varphi \cos \varphi - \operatorname{ch} z \varphi \sin \varphi)] \sin z t dz.$$

$$\begin{aligned}
u_z = & \frac{(1-\nu)^2}{E} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z_k}{1-\nu} a_k \exp(-(z_k-1)t) + \left(1 + \frac{z_k}{1-\nu} \right) b_k \exp(-(z_k+1)t) \right] \times \right. \\
& \times \sin z_k \varphi + \int_0^{\pi} [A(t)(i \operatorname{ch} z \sin \varphi - \operatorname{sh} z \cos \varphi) + B(t) \operatorname{sh} z \cos \varphi + \\
& + i \operatorname{ch} z \sin \varphi] (\sin t - i \cos t) \frac{dz}{z} + \int_0^{\pi} [(i \operatorname{ch} z \sin \varphi + \operatorname{sh} z \cos \varphi) A(t) + \\
& + B(t)(i \operatorname{sh} z \cos \varphi - \operatorname{ch} z \sin \varphi)] \frac{\sin t}{t} dz + \int_0^{\pi} [A(t)(i \operatorname{ch} z \sin \varphi + \operatorname{sh} z \cos \varphi) + \\
& + B(t)(i \operatorname{sh} z \cos \varphi - \operatorname{ch} z \sin \varphi)] \cos t dz \Big\} + a_0 e^{-t} \\
u_r = & \frac{1}{E} \left\{ 2(1-\nu) i e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} [-z_k a_k \exp(-(z_k-1)t) + (-z_k + \right. \\
& + 2(1-2\nu)) b_k \exp(-(z_k+1)t)] \cos z_k \varphi - \int_0^{\pi} [A(t)(i \operatorname{sh} z \sin \varphi + \\
& + 2(1-\nu) \operatorname{ch} z \cos \varphi) + B(t)(i \operatorname{ch} z \cos \varphi - 2(1-\nu) \operatorname{sh} z \sin \varphi)] \sin t dz \Big\} \\
& + (1-2\nu) \int_0^{\pi} [A(t) \operatorname{sh} z \sin \varphi + B(t) \operatorname{ch} z \cos \varphi] \cos t dz + z \sin \varphi + i \cos \varphi
\end{aligned}$$

Для удовлетворения граничным условиям, заданным на дуге окружности ($t=0$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$), используем ортогональность тригонометрических функций, а для удовлетворения условиям, заданным на линиях ($\varphi = \text{const}$, $0 \leq t < \infty$), кроме обычного интеграла Фурье, используем классический интеграл Фурье, для которого справедливо разложение [3]

$$F(t) = -2 \int_0^{\pi} e^{-t} F(t) dt + \int_0^{\pi} A(t) (\cos t - i \sin t) dt \quad (1.7)$$

$$A(t) = \frac{2}{\pi(1-\nu)} \int_0^{\pi} F(t) (\cos t + i \sin t) dt$$

Отметим, что разложение (1.7) для случая дискретного спектра впервые было использовано А. А. Баблюном при рассмотрении граничных задач теории упругости для кольцевого сектора [2].

2. Рассмотрим теперь плоскую задачу теории упругости для кругового сектора ($0 \leq r \leq 1$, $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$), когда на границе $r=1$ заданы нормальные нагрузки, симметричные относительно оси $\varphi=0$. Для простоты примем, что касательные нагрузки на границе $r=1$ отсут-

ствуют. На границах $\varphi = \pm \varphi_0$ заданы нулевые касательные напряжения и нормальные перемещения. В силу симметрии относительно оси $\varphi = 0$ будем рассматривать только область ($0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$) при следующих граничных условиях:

- 1) $\tau_{r\varphi} = u_r = 0$ при $\varphi = 0$ ($0 < r < 1$) ($0 < t < \infty$)
- 2) $\tau_{r\varphi} = 0$ при $\varphi = \varphi_0$ ($0 < r < 1$) ($0 < t < \infty$)
- 3) $u_\varphi(r, \varphi) = u(t)$ при $\varphi = \varphi_0$ ($0 < r < 1$) ($0 < t < \infty$)
- 4) $\tau_{r\varphi} = 0$ при $0 < \varphi < \varphi_0$ $r = 1$ ($t = 0$)
- 5) $\tau_r = P_0(\varphi - \varphi_1)$ при $0 < \varphi < \varphi_0$ $r = 1$ ($t = 0$)

Из соотношений (1.6) с учетом (1.5) легко заметить, что при $a_0 = 0$ условия 1) в (2.1) (условия симметрии) удовлетворяются тождественно. Удовлетворение же условиям 2) и 3) в (2.1) с учетом разложения (1.7) приводит к следующим соотношениям:

$$A(r) = \frac{\bar{u}(r)}{2i\Delta(r)} [\operatorname{ch} \varphi_0 \sin \varphi_0 - i \operatorname{sh} \varphi_0 \cos \varphi_0] \quad (2.2)$$

$$B(r) = \frac{\bar{u}(r)}{2i\Delta(r)} [i \operatorname{ch} \varphi_0 \sin \varphi_0 + \operatorname{sh} \varphi_0 \cos \varphi_0]$$

где

$$(1 + i^2)\bar{u}(r) = \frac{2}{\pi} \frac{E}{1 - \nu^2} \int_0^{\varphi_0} u(t)(\cos it + i \sin it - e^{-it}) dt, \quad \Delta(r) = \operatorname{ch}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \quad (2.3)$$

Остановимся более подробно на одном конкретном случае, когда

$$u(t) = r_0 e^{-t}, \quad u_0 = r_0 r, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (2.4)$$

который соответствует контактной задаче о симметричном вдавливании без трения абсолютно жестких клиновидных тел на границы ($\varphi = \pm \varphi_0$,

$0 < r < 1$) упругого кругового сектора (фиг. 1).

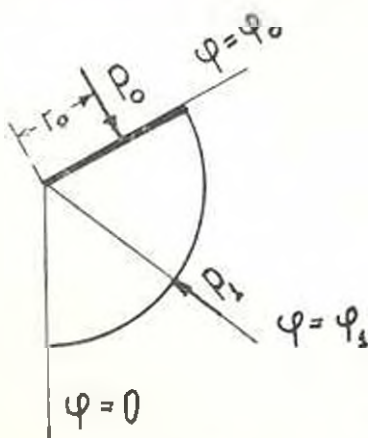
Подставляя (2.4) в (2.3), получаем

$$\bar{u}(r) = \frac{r_0 E}{\pi(1 - \nu^2)} \frac{1}{1 + i^2} \quad (2.5)$$

и соотношения (2.2) принимают вид

$$A(r) = \frac{r_0 E}{2\pi(1 - \nu^2)} \frac{\operatorname{ch} \varphi_0 \sin \varphi_0 - i \operatorname{sh} \varphi_0 \cos \varphi_0}{(1 - i^2)(\operatorname{ch}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0)} \quad (2.6)$$

$$B(r) = \frac{r_0 E}{2\pi(1 - \nu^2)} \frac{i \operatorname{ch} \varphi_0 \sin \varphi_0 + \operatorname{sh} \varphi_0 \cos \varphi_0}{(1 + i^2)(\operatorname{ch}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0)}$$



Фиг. 1

Прежде, чем перейти к удовлетворению граничным условиям, заданным на линии $t=0$ ($0 \leq \varphi \leq \varphi_0$), заметим, что если значения функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ из (2.6) подставим в интеграл Фурье в (1.5), то тем самым в дальнейшем операции интегрирования заменим на операции дифференцирования. Не вдаваясь в подробности, отметим только, что в результате указанной выше подстановки приходим к заключению, что вместо интеграла Фурье и представления (1.5) достаточно взять функцию

$$F_0(t) = bte^{-t}, \quad b = -\frac{\varepsilon_0 E}{2\varepsilon_0(1-\varepsilon^2)} \quad (2.7)$$

обусловленную полюсами второго порядка функций $A(z)$ и $B(z)$ в точке $z=t$ комплексной плоскости.

б. Удовлетворяя граничным условиям 4) и 5) в (2.1), получаем следующие соотношения

$$a = \frac{b}{2} - \frac{P_1}{2\varepsilon_0}, \quad a_1 = -\frac{P_1 \cos \varepsilon_0 \varphi_1}{\varepsilon_0(2\varepsilon_0 - 1)}, \quad b_1 = \frac{P_1 \cos \varepsilon_0 \varphi_1}{\varepsilon_0(2\varepsilon_0 + 1)} \quad (3.1)$$

Подставляя теперь значения коэффициентов (3.1) в формулы (1.6) с учетом (2.7), получаем следующие выражения для компонент напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_0 E}{2\varepsilon_0(1-\varepsilon^2)} - \frac{\varepsilon_0 Et}{2\varepsilon_0(1-\varepsilon^2)} - \frac{P_1 \pi e^{-t} \operatorname{sh} t}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi + \varphi_1) - 1}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t - \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi + \varphi_1) \right)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi - \varphi_1) - 1}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t - \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi - \varphi_1) \right)^2} \right\} + \frac{P_1}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t - \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi + \varphi_1)} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t - \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi - \varphi_1)} \right\}$$

$$\sigma_y = -\frac{\varepsilon_0 Et}{2\varepsilon_0(1-\varepsilon^2)} + \frac{P_1 \pi e^{-t} \operatorname{sh} t}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi + \varphi_1) - 1}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t - \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi + \varphi_1) \right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi - \varphi_1) - 1}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t - \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi - \varphi_1) \right)^2} \right\} + \frac{P_1}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t - \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi + \varphi_1)} - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\varepsilon_0} t - \cos \frac{\pi}{\varepsilon_0} (\varphi - \varphi_1)} \right\}$$

$$\left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\varphi_0} t}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2\varphi_0} t - \cos \frac{\pi}{2\varphi_0} (\varphi - \varphi_1)} \right| \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = & -\frac{P_1 \pi e^t}{2\varphi_0^2} \operatorname{sh} t \operatorname{sh} \frac{\pi}{2\varphi_0} t \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2\varphi_0} (\varphi - \varphi_1)}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{2\varphi_0} t - \cos \frac{\pi}{2\varphi_0} (\varphi_1 - \varphi_1) \right)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\sin \frac{\pi}{2\varphi_0} (\varphi - \varphi_1)}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{2\varphi_0} t - \cos \frac{\pi}{2\varphi_0} (\varphi - \varphi_1) \right)^2} \right| \end{aligned}$$

Связи между постоянными величинами P_0 , P_1 и φ_0 находим из условия равенства нулю главного вектора и главного момента действующих сил

$$P_1 \cos \varphi_1 = P_0 \sin \varphi_0, \quad P_1 \sin \varphi_1 = -P_0 \cos \varphi_0, \quad \frac{r_0 F}{8\varphi_0(1-\alpha^2)} + \frac{P_1}{2\varphi_0} = r_0 P_0 \quad (3.3)$$

Теперь на основе формул (3.2) рассмотрим появление напряжений около точки $t=0$ ($t=\infty$). Для этого перейдем от координат (t, φ) к координатам (r, φ) и найдем асимптотику функций напряжений при $r \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} \tau_r(r, \varphi) &= -\frac{P_1 \pi}{\varphi_0^2} \cos \frac{\pi \varphi}{2\varphi_0} \cos \frac{\pi \varphi_1}{2\varphi_0} r^{-(1-\alpha)-2} + \frac{r_0 F \ln r}{2\varphi_0(1-\alpha^2)} + A_0 \\ \tau_\varphi(r, \varphi) &= -\frac{P_1 \pi}{\varphi_0^2} \cos \frac{\pi \varphi}{2\varphi_0} \cos \frac{\pi \varphi_1}{2\varphi_0} r^{-(1-\alpha)-2} + \frac{r_0 F \ln r}{2\varphi_0(1-\alpha^2)} + \frac{P_1}{\varphi_0} \\ \tau_{rz}(r, \varphi) &= -\frac{P_1 \pi}{\varphi_0^2} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi \cos \frac{\pi}{2\varphi_0} \varphi_1 r^{-(1-\alpha)-2} \\ A_0 &= \frac{r_0 F}{2\varphi_0(1-\alpha^2)} + \frac{P_1}{\varphi_0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из представлений (3.4) легко заметить, что логарифмические особенности в выражениях нормальных напряжений обусловлены только конкретным линейным видом перемещений точек границы $\varphi = \varphi_0$. Что же касается степенных особенностей в выражениях всех напряжений, то они появляются при углах раствора кругового сектора $\varphi_0 \geq \pi/2$.

При рассмотрении коэффициентов интенсивности напряжений приходим к следующим выводам.

а) при произвольном значении угла ($\varphi = \varphi_1$) приложения нормальной нагрузки на дуге окружности ($r=1$) степенная особенность в нормальных напряжениях исчезает при подходе к точке $r=0$ по направлению

равлению $\varphi = \varphi_0/2$, а касательные напряжения достигают максимального значения;

б) при значении $\varphi_1 = \varphi_0/2$ угла приложения нормальной нагрузки на дуге окружности степенные особенности исчезают во всех напряжениях и касательные напряжения всюду обращаются в нуль;

в) коэффициенты интенсивности в нормальных напряжениях достигают своих наибольших значений при $\varphi = \varphi_1 = 0$.

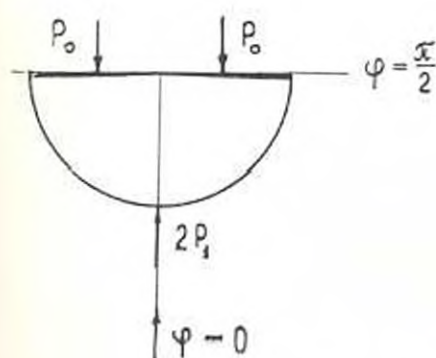
4. Отдельно рассмотрим случай, когда $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi_1 = \pi$. В первом случае ($\varphi_0 = \pi/2$) из второго равенства (3.3) следует, что $\varphi_2 = 0$, а из первого равенства (3.3) — $P_1 = P_0$ (фиг. 2). В этом случае представления (3.4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(r, \varphi) &= -\frac{4P_0}{\pi} \cos 2\varphi + \frac{\alpha_0 E}{\pi(1-\nu^2)} \ln r + A_0 \\ \varepsilon_\varphi(r, \varphi) &= \frac{4P_0}{\pi} \cos 2\varphi + \frac{\alpha_0 E \ln r}{\pi(1-\nu^2)} + \frac{2P_0}{\pi} \\ \tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= -\frac{4P_0}{\pi} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (4.1)$$

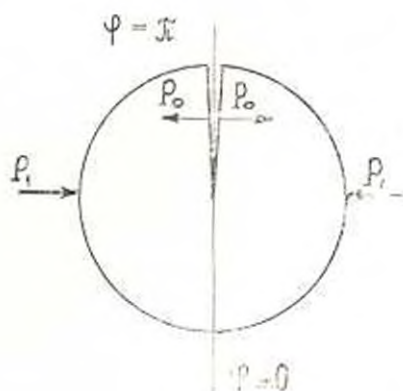
Во втором случае ($\varphi_0 = \pi$) из первого равенства (3.3) следует, что $\varphi_2 = \pi/2$, а из второго равенства, что $P_1 = P_0$ (фиг. 3). Отметим, что в этом случае хотя показатели степеней в представлениях (3.4) становятся равными — 1, однако коэффициенты при этих степенях становятся равными нулю, так что в разложениях во тригонометрические функции сгруппируемые напряжения исчезают. Формулы (3.4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(r, \varphi) &= \frac{\alpha_0 E \ln r}{2\pi(1-\nu^2)} + \frac{\alpha_0 E}{2\pi(1-\nu^2)} + \frac{P_1}{\pi} \\ \varepsilon_\varphi(r, \varphi) &= \frac{\alpha_0 E \ln r}{2\pi(1-\nu^2)} + \frac{P_1}{\pi}, \quad \tau_{r\varphi}(r, \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

При этом равенство нулю касательных напряжений имеет место всюду.



Фиг. 2



Фиг. 3

б. Рассмотрим задачу, когда на границе $r=1$ кругового сектора действует равномерно распределенная нагрузка. Граничные условия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} z_{,1} = u_{,1} = 1 & \quad \text{при} \quad z=0, \quad 0 < t < \infty \\ z_{,1} = 0 & \quad \text{при} \quad z=\bar{r}_0, \quad 0 < t < \infty \\ u_{,1} = \bar{r}_0 e^{-t} & \quad \text{при} \quad \bar{r} = \bar{r}_0, \quad 0 < t < \infty \\ z_{,1} = 1 & \quad \text{при} \quad 0 < z < \bar{r}_0, \quad t=0 \\ z_{,1} = \frac{P_1}{\bar{\varphi}_0} & \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad t=0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

В этом случае функции (1.5) и формулы (3.2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} F(t, z) &= \left[\frac{P_1}{2z_0} - \frac{z_0 E}{8z_0(1-\nu^2)} \right] e^{-t} - \frac{z_0 E t e^{-t}}{2z_0(1-\nu^2)} \\ z_{,1}(r, z) &= 0, \quad z_{,2}(r, z) = \frac{P_1}{\bar{\varphi}_0} + \frac{z_0 E}{2z_0(1-\nu^2)} + \frac{z_0 E \ln r}{2z_0(1-\nu^2)} \\ z_r(r, z) &= \frac{P_1}{\bar{\varphi}_0} + \frac{z_0 E \ln r}{2z_0(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Приведем также выражения для перемещений

$$\begin{aligned} u_1(r, \varphi) &= \frac{1-\nu}{E} \left[(1-2\nu) \frac{P_1}{\bar{\varphi}_0} - \frac{z_0 E}{2z_0(1-\nu^2)} + \frac{z_0 E (1-2\nu)}{2z_0(1-\nu^2)} \ln r \right] r \\ u_2(r, \varphi) &= \frac{z_0 \varphi E}{\bar{\varphi}_0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из (5.2) и (5.3) легко заметить, что при равномерном нагружении границы $r=1$ кругового сектора степенные особенности в напряжениях не имеют и остаются только логарифмические особенности в выражениях радиальных напряжений. Касательные напряжения всюду равны нулю. Из всех компонент напряжений и перемещений от координаты φ зависят только перемещения u_2 . Отметим также, что перемещения в точке $r=0$ равны нулю.

ABOUT ONE BOUNDARY PROBLEM FOR AN ELASTIC CIRCULAR SECTOR

V. S. MAKARIAN, V. G. SARKISIAN

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ն Մ

Դիտարկված է հարթ խնդիր առաձգական շրջանային սեկտորի համար, երբ շրջանագծի աղեղի եզրին սիմետրիկ կենտրոնացված ուժերի տեսքով բեռներ են տրված: Սեկտորի եզրի մնացած մասում տրված են տեղափոխություններ և զրոյական շաշափող լարումներ:

Խնդրի լուծումը կատարված է բառ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների փերյունովյան և Յուրբերի դասական ինտեգրալի հիման վրա: Ստացված է խնդրի փակ լուծում՝ բացառալու տեսքով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Новацкий В. Теория упругости.—М.: Мир, 1975.
2. Библиян А. А. Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях.—Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1962, т. 15, №1, с. 87—101.
3. Левитан Б. М., Саркисян Н. С. Введение в спектральную теорию.—М.: Наука, 1970.
4. Алексанян Р. Լ., Казимյան Զ. Ս., Саркисян В. Դ. Плоская контактная задача теории упругости составного круга.—Меж. вуз. сб. Механика, вып. 3, Ереван, 1984.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.—М.: Наука, 1968.
6. Прудников А. И., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды.—М.: Наука, 1981.
7. Чобанян К. С. Напряжения в упругих составных телах. Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1987.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
15.VI. 1989