



К активным массовым силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу, возникающую вследствие изменений объема, связанных с нагреванием.

В работе [3] показано, что массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения лишь в том случае, если соотношение между числом Грасгофа  $Gr = \frac{g \rho^2 l (\Delta T) \beta_0}{\nu^2}$  и числом Рейнольдса  $R = \frac{V_0 l}{\nu}$

равно

$$Gr \approx R^2$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta_0$  — коэффициент кубического расширения,  $(\Delta T) \beta_0 = T_0 - T_1$  — разность температур тела (стенки) и жидкости,  $l$  — характеристическая длина,  $V_0$  — характерная скорость.

Такое соотношение между числом Грасгофа и числом Рейнольдса может существовать только при очень малых скоростях течения и значительных разностях температур.

Анализ системы уравнений движения (1.1) показывает, что в случае модели структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений, учитывающей внутренние степени свободы, массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения, если  $Gr \approx R^2$ , то есть учет вращения частицы жидкости не приносит ничего нового.

Таким образом, архимедову подъемную силу в уравнениях (1.1) можно не учитывать при умеренно больших скоростях (при больших числах Рейнольдса) и при малых разностях температур [3]. Известно, что такие течения являются вынужденными коллективными течениями [3]. В случаях, когда архимедову подъемную силу в уравнениях движения (1.1) можно отбросить, а вязкости считать не зависящей от температуры, распределение скоростей становится независимым от распределения температуры.

## 2. Течение Пуазейля в плоскопараллельном канале

Плоскопараллельное установившееся ламинарное течение вязкой несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений между двумя параллельными стенками были рассмотрены в работах [1,4].

Для распределения поперечной скорости  $u$  и скорости вращения частицы  $\omega$  имеем [1]

$$u^* = \frac{u}{u_0} = 1 - \beta^2 \kappa^2 \frac{1}{\kappa} \frac{\operatorname{ch} \kappa - \operatorname{ch} \kappa b^*}{\operatorname{sh} \kappa} \quad (2.1)$$

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_0} = b^* \frac{\operatorname{sh} \kappa^2}{\operatorname{sh} \kappa} \quad (2.2)$$

где

$$u_0 = -\frac{1}{2} b^2 \gamma_1^{-1} \frac{dP}{dx}, \quad b^* = \frac{y}{b}, \quad \kappa = b \kappa = \frac{\nu}{l} b, \quad \kappa = \frac{\nu}{l}$$

$$N = \left( \frac{\tau_r}{\gamma - \tau} \right)^{1/2}, \quad l = \left( \frac{c_a + c_d}{4\tau} \right)^{1/2} \quad \tau = \tau_0, \quad \tau_r = \tau_0 r, \quad c_a = c_a \rho, \quad c_d = c_d \rho \quad (2.3)$$

Здесь  $u_0$  — максимальная скорость в классическом течении Пуазейля, которая достигается при  $y=0$ ;  $u$  — проекция вектора скорости точки на ось канала  $x$ ;  $\omega$  — проекция вектора угловой скорости вращения частицы на ось  $x$ ;  $2b$  — расстояние между стенками;  $\Lambda$  — безразмерный параметр связи, характеризующий связь уравнений поступательного и вращательного движений;  $l$  — параметр, который может быть отождествлен с некоторой характеристикой вещества зависящей от размера молекул (подструктуры);  $r$  — число, характеризующее взаимосвязь между геометрией и свойством жидкости [1].

При получении (2.1) и (2.2) принято, что жидкость прилипает стенкам канала при  $y = \pm b$  и следовательно,  $u(\pm b) = 0$  и  $\omega(\pm b) = 0$ .

### 3. Составление уравнения энергии

Из уравнения «первого закона термодинамики» для систем с несимметричным тензором напряжений имеем [1]

$$\rho \frac{de}{dt} = -\rho \tau \cdot \bar{v} + c \dot{v} + \tau (\cdot \nabla T) \quad (3.1)$$

где

$$\bar{q} = -\tau \nabla T$$

Здесь  $e$  — удельная внутренняя энергия;  $\bar{q}$  — вектор потока тепла через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности;  $c$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — абсолютная температура;  $\Phi$  — скорость диссипации механической энергии (на единицу массы жидкости), вызываемой вязкостью жидкости.

Для скорости диссипации (на единицу объема жидкости) имеем [1]

$$\begin{aligned} \rho \Phi = \tau \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + c_a \left[ \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ + \tau_r \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 4\omega_x \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - 4\omega_y \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 4\omega_z \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \right] + \left( c_0 - \frac{2}{3} c_d \right) \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)^2 + c_d \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)^2 \quad (3.2)$$

В том случае, когда скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемыми ими изменениями термодинамических величин можно пренебречь. При определении производных от термодинамических величин в этом случае надо считать постоянным давление. Тогда будем иметь следующее термодинамическое соотношение [5]:

$$T \frac{ds}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} \quad (3.3)$$

где  $s$  — удельная энтропия,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Используя уравнение сохранения энергии (3.1) и уравнение неразрывности (1.1), соотношение (3.3) перепишем в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\gamma}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{1}{c_p} \Phi \quad (3.4)$$

Здесь было использовано также соотношение Гиббса [6]

$$\frac{1}{T} \frac{ds}{dt} = \frac{dc}{dt} + \beta \frac{d(1/\rho)}{dt}$$

#### 4. Определение распределения температуры

Так как для плоской задачи Пуазейля скорость диссипации согласно (3.2) равно

$$\rho \Phi = (\eta + \gamma_v) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 4\gamma_v \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2\right) + (c_a + c_d) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2$$

то уравнение для распределения температуры (уравнение энергии (3.4)) примет вид

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) &= \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + (\eta + \gamma_v) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \\ &+ 4\gamma_v \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2\right) + (c_a + c_d) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Допустим, что обе стенки канала имеют одинаковую температуру, тогда граничные условия будут иметь вид

$$T = T_0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) при граничных условиях (4.2) дает для распределения температуры решение, не зависящее от  $x$ . Поскольку  $u = 0$ , а  $T$  не зависит от  $x$ , то вся левая часть уравнения (4.1), представ-

ляющая перенос тепла представим кинематикой, описанной в [3,7]. Следовательно, полиномиальное при течении поле температур обусловлено только температурными в поперечном направлении и теплом, образующимся вследствие трения. Если проинтегрировать в уравнении (4.1) члены, равные нулю, мы получим

$$\lambda \frac{dT^*}{dy^2} = -(\epsilon_1 + \epsilon_2) \left( \frac{du}{dy} \right)^2 - 4\epsilon_2 \left( u \frac{du}{dy} + u^2 \right) + (\epsilon_0 + \epsilon_2) \left( \frac{d^2u}{dy^2} \right)^2 \quad (4.3)$$

Вычисляя из (2.1) и (2.2) значения  $u^2$ , производных  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{d^2u}{dy^2}$  и подставляя их в уравнение (4.3), проинтегрировав при граничных условиях (4.2), получим следующее выражение для распределения температуры по сечению канала:

$$\begin{aligned} \Delta T^* = \lambda \frac{T_{\text{ср}} - T_0}{\gamma \mu_0^2} = \frac{1}{3} [1 - (b^*)^2] + N^2 \left[ \frac{1}{i^2 \text{sh}^2 i} (\text{ch} 2i - \text{ch} 2i b^*) + \right. \\ \left. \left( \frac{2N^2}{1-N^2} \frac{1}{\text{sh}^2 i} + \frac{2}{i^2} \right) (1-b^{*2}) - \frac{i+N^2}{1-N^2} \frac{1}{i^2} \left( 1 - \frac{b^*}{\text{sh} i} \text{sh} i b^* \right) + \right. \\ \left. + \frac{8(2-N^2)}{1-N^2} \frac{1}{i^2 \text{sh} i} (\text{ch} i - \text{ch} i b^*) \right] \quad (4.4) \end{aligned}$$

Максимальное повышение температуры получается в середине канала и равно

$$\begin{aligned} \Delta T_{\text{max}}^* = \lambda \frac{T_{\text{ср}} - T_0}{\gamma \mu_0^2} = \frac{1}{3} + N^2 \left[ \left( \frac{2N^2}{1-N^2} \frac{1}{\text{sh}^2 i} + \frac{4}{i^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1-N^2}{1-N^2} \frac{1}{i^2} + \frac{8(2-N^2)}{1-N^2} \frac{1}{i^2 \text{sh} i} (\text{ch} i - 1) \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

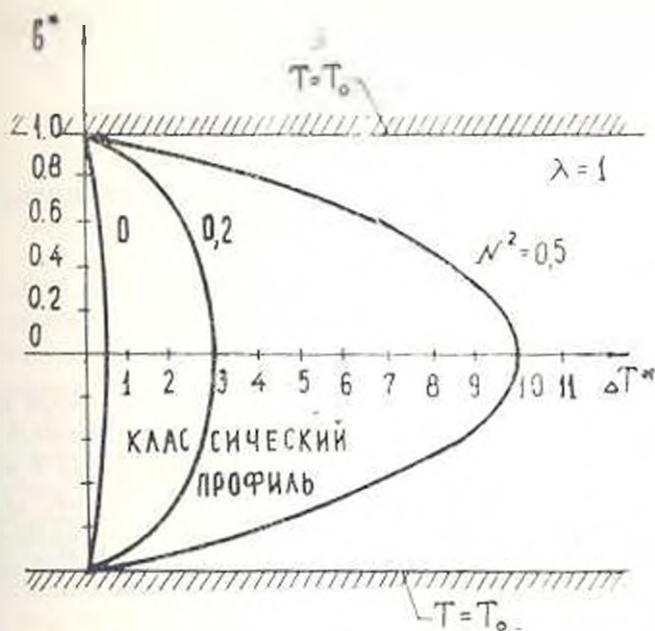
Выражение безразмерного распределения температуры (4.4) для течения в плоскопараллельном канале в предельном случае  $N=0$  или  $i \rightarrow \infty$  сводится к классическому решению, полученное Г. Шлихтингом в [3,7]

$$\lim_{N \rightarrow 0} \Delta T^* = \frac{1}{3} [1 - (b^*)^2]$$

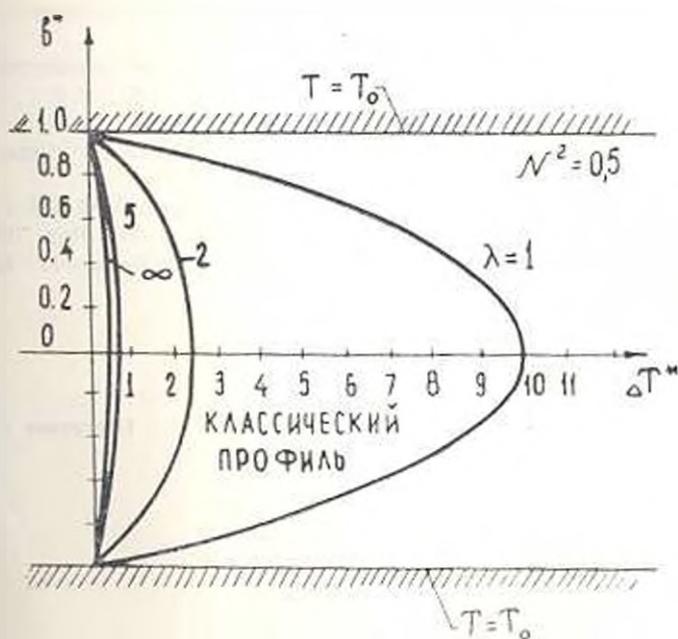
Для различных значений  $N$  (при  $i=1$ ) на фиг. 1 изображено отличие распределения температуры от классического течения Пуазейля.

Как видно из фиг. 1, профиль распределения температуры уже не является параболическим. Кроме того, выделение тепла здесь больше тепла для классических ньютоновских жидкостей, где внутреннее трение не учитывается.

На фиг. 2 показаны графики распределения безразмерной температуры при различных значениях параметра  $i$  и  $N^2=0,5$ . График по-



Фиг. 1



Фиг. 2

казывает, что чем ниже значение  $\lambda$ , тем более ярко выражены эффекты учета подструктуры жидкости на распределения температуры по сечению канала.

# ABOUT ONE SOLUTION OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN VISCID FLUID

L. G. PETROSIAN

ՄԵԿԱՆԻԿԱԿԱՆ ԳՐԱԳՐԱԿԱՆ ԶԵՂԵՆԻԿ ԶՈՒԹՈՒԹ ԶԻՄՈՒՍՏԵՆԱԿԱՆՔԻ  
ՐԱՆՆԵՑՄԱՆ ՄԵԿ ԿՐԻՏԻԿԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Գ. ՔԵՏՐՈՍԻԱՆ

Ա. մ. ֆ. Ի. Ի. Ի.

Իրաարկված է ջերմաստիճանային բաշխումը ոչ սիմետրիկ լարման բևե-  
զարով անձաչիկ սուսեղանիկ հեղուկի երկու պարզաձև պատերի միջև լարթ  
պարզաձև ճաստապիւստ լամբնար ճոստների պեպրում: Հաշիվ է ստեղծած ջրփ-  
ման նեանարով սասչացած ջերմոթյունը: Յույն է սրված, որ ջերմաստի-  
ճանների բաշխման պրոֆիլը ոչ պարարոյաչին է, և ոչ սիմետրիկ հեղուկ-  
ների պեպրում անջաստիղ ջերմոթյունը մեծ է, բան նյութանյան դասական  
հեղուկներում:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Петросян Л. Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тен-  
зором напряжений.—Ер.: Изд-во ЕГУ, 1984. 308 с.
2. Неген Ван Десс, Ингрес А. Т. О неизотермической модели несимметричных жид-  
костей.—Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1967, №5, с. 132—136.
3. Шахтинс Г. Теория пограничного слоя.—М.: Наука, 1974. 711 с.
4. Попель А. С. О гидродинамике суспензий.—Изв. АН СССР, Механика жид-  
кости и газа, 1969, №4, с. 24—30.
5. Лавров А. Л., Линиц Е. М. Гидродинамика.—М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Де Гроот С., Мизур П. Неравновесная термодинамика.—М.: Мир, 1964. 456 с.
7. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене.—М.: Изд-во ИЛ,  
1958. 366 с.

Երևանский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
15.VI.1987