ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 1, 1990 Механика

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ШАРЕ

СААКЯН С. Г.

В работе рассматривается осесимметричная задача о распространении упругих волн в радиально-неоднородном упругом шаре при условии, что на его поверхности известны радиальное и касательные напряжения. Изучены также стоячие колебания радиально-неоднородного упругого шара.

1. Общие формулы. Пусть коэффициенты Ламе λ, μ и плотность ρ упругого шара в сферических координатах (r, θ, φ) заданы функциями:

$$\lambda=\lambda_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}};\quad \mu=\mu_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}};\quad \rho=\rho_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{4}{\gamma-2}} \tag{1.1}$$

где $\lambda_0=(\gamma-2)\mu_0$; μ_0, ρ_0 — коэффициенты Ламе и плотность среды при $r=r_0$; $\gamma=(\lambda_0+2\mu_0)/\mu_0$.

Волновое поле перемещений в неоднородном изотропном упругом шаре $r<r_0$ в любой момент времени $t>0$ определяется векторным уравнением упругости

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}+\operatorname{grad}\lambda\operatorname{div}\vec{u}+$$

$$+\operatorname{grad}\mu\times\operatorname{rot}\vec{u}+2\operatorname{grad}\mu\operatorname{grad}\vec{u}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

при условиях

$$\vec{u}\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{1.3}$$

$$\sigma_{rr}(r_0,\theta,t)=\sigma_0 f_1(\theta,t);\ \sigma_{r\theta}(r_0,\theta,t)=\sigma_0 f_2(\theta,t);\ \sigma_{r\varphi}(r_0,\theta,t)=\sigma_0 f_3(\theta,t) \tag{1.4}$$

Принимая предположение Рэлея, по которому зависимость между компонентами тензора напряжений и вектора перемещений $\vec{u}\,(u_r, u_\theta, u_\varphi)$ неоднородной упругой среды такая же, как и для однородной, в осесимметричном случае имеем

$$\sigma_{rr}=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r};\quad \sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right) \tag{1.5}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\lambda\Theta+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right);\quad \sigma_{r\varphi}=\mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right) \tag{1.6}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\lambda\Theta+2\mu\left(\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta\right);\quad \sigma_{\theta\varphi}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\frac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\right) \tag{1.7}$$

где

$$\Theta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta) \tag{1.8}$$

Вектор перемещений $\vec{u}$ радиально-неоднородной упругой среды представим через обобщенные потенциалы Φ_1, Φ_2, Φ_3 в следующем виде:

$$\vec{u}(r,\theta,t)=\operatorname{grad}\Phi_1(r,\theta,t)+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\Phi_2(r,\theta,t)\vec{e}_r]+\operatorname{rot}[\Phi_3(r,\theta,t)\vec{e}_r] \tag{1.9}$$

то есть компоненты вектора перемещений $\vec{u}$ определим по формулам:

$$u_r=r_0\left|\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R}-R^{-\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial\theta}\right)\right| \tag{1.10}$$

$$u_\theta=r_0\left|\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R}+R^{-\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial R\partial\theta}\right| \tag{1.11}$$

$$u_\varphi=-\frac{r_0}{R}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial\theta} \tag{1.12}$$

где $\vec{e}_r$—орт по оси r, $R=r/r_0$; $\Phi_i^*=\Phi_i/r_0^2$, $i=1,\ 2,\ 3.$

Тогда, представление вектора перемещений (1.9) допускает разделение векторного уравнения движения (1.2) на следующие независимые скалярные уравнения [1]:

$$\Delta\Phi_1^*+\frac{4}{(\gamma-2)R}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R}-\frac{4}{(\gamma-2)R^2}\Phi_1^*-\frac{1}{\gamma R^2}\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial\tau^2}=0 \tag{1.13}$$

$$\Delta\Phi_2^*-\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial R}-\frac{4\gamma}{(\gamma-2)R^2}\Phi_2^*-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial\tau^2}=0 \tag{1.14}$$

$$\Delta\Phi_3^*+\frac{4}{(\gamma-2)R}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial R}-\frac{\gamma}{(\gamma-2)R^2}\Phi_3^*-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_3^*}{\partial\tau^2}=0 \tag{1.15}$$

где

$$\Delta=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta};\quad \tau=\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}\frac{t}{r_0}$$

2. Распространение волн в неоднородном упругом шаре при действии на его поверхности радиальных давлений, зависящих от времени. В этом случае обобщенный потенциал Φ_1^* зависит от R и τ; $\Phi_2^*=\Phi_3^*=0$. Распространение волн в шаре описывается уравнением

$$\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial R^2}+\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R}-\frac{4}{(\gamma-2)R^2}\Phi_1^*-\frac{1}{\gamma R^2}\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial\tau^2}=0 \tag{2.1}$$

при условиях

$$\Phi_1^*\big|_{\tau=0}=\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0}=0 \tag{2.2}$$

$$\left|\gamma R^{\frac{4\gamma}{\gamma-2}}\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial R^2}+2(\gamma-2)R^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R}\right|_{R=1}=-\frac{\sigma_0}{\mu_0}f(\tau) \tag{2.3}$$

Уравнение (2.1) и условие (2.3) в образе преобразования Лапласа по τ

$$\bar\Phi_1^*(R,p)=\int_0^\infty\Phi_1^*(R,\tau)\exp(-p\tau)d\tau \tag{2.4}$$

следующие:

$$\frac{d^2\bar\Phi_1^*}{dR^2}+\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{d\bar\Phi_1^*}{dR}-\left(\frac{p^2}{\gamma}+\frac{4}{\gamma-2}\right)\frac{\bar\Phi_1^*}{R^2}=0 \tag{2.5}$$

$$\left|\gamma R^{\frac{4\gamma}{\gamma-2}}\frac{d^2\bar\Phi_1^*}{dR^2}+2(\gamma-2)R^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}\frac{d\bar\Phi_1^*}{dR}\right|_{R=1}=-\frac{\sigma_0}{\mu_0}\bar f(p) \tag{2.6}$$

Решение уравнения Эйлера (2.5), при условии (2.6) и ограниченности в центре шара, имеет вид

$$\bar\Phi_1^*(R,p)=-\frac{\sigma_0\bar f(p)R^{\alpha-c}}{\gamma\mu_0(\alpha-c)(\alpha-d)} \tag{2.7}$$

где

$$c=\frac{\gamma+2}{2(\gamma-2)};\quad d=c-\frac{\gamma-4}{\gamma};\quad \alpha=\sqrt{\frac{p^2}{\gamma}+c^2+\frac{4}{\gamma-2}}$$

Ветвь радикала α фиксирована условием $\arg\alpha=0$ при $p>0$. Согласно (1.10)–(1.12) и (1.5)–(1.8) компоненты вектора перемещений и тензора напряжений имеют вид

$$\bar u_R(R,p)=-\frac{c_0\sigma_0\bar f(p)R^{\alpha+c_0+1}}{\gamma\mu_0(\alpha-d)} \tag{2.8}$$

$$\bar\sigma_{RR}(R,p)=-\sigma_0\bar f(p)R^{\alpha+c_0} \tag{2.9}$$

$$\bar\sigma_{\theta\theta}(R,p)=\bar\sigma_{\varphi\varphi}(R,p)=-\frac{\gamma-2}{\gamma}\sigma_0\bar f(p)\left(1+\frac{b}{\alpha-d}\right)R^{\alpha+c_0} \tag{2.10}$$

где

$$c_0=\frac{6-\gamma}{2(\gamma-2)};\quad b=\frac{2(3\gamma-4)}{\gamma(\gamma-2)}$$

Обратное преобразование Лапласа изображений (2.8)–(2.10) получим при условии $\bar f(p)=1$, то есть $f(\tau)=\delta(\tau)$, где δ—функция Дирака. В общем случае для любой $\bar{f}(p)$, обращение выражений (2.8)—(2.10) находим по формуле свертки.

Из формул [2]

$$\exp(-a\sqrt{p^2+b^2}) \doteq \delta(\tau-a) - H(\tau-a)\frac{ab}{\sqrt{\tau^2-a^2}}\, J_1(b\sqrt{\tau^2-a^2})$$

$$\bar{f}(\sqrt{p^2+b^2}) \doteq f(\tau) - b\int_0^{\tau} f(\sqrt{\tau^2-u^2})\, J_1(bu)\, du \qquad (2.11)$$

получим

$$u_r(R,\tau) = -\frac{r_0\sigma_0}{\sqrt{\gamma}\,\mu_0} R^{c_1-1} H\left(\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)\left\{\exp\left[-d\sqrt{\gamma}\left(\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-R^{-d}\int_0^{\sqrt{\tau^2-\left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} \exp\left[-d\sqrt{\gamma}\sqrt{\tau^2-u^2}\right] J_0(\sqrt{\gamma}\,\alpha_0 u)\, du\right\} \qquad (2.12)$$

$$\sigma_{rr}(R,\tau) = -\sigma_0 R^{c_1}\left\{\delta\left(\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_0 \ln R^{-1} H\left(\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\sqrt{\tau^2-\left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} J_1\left(\alpha_0\sqrt{\gamma}\sqrt{\tau^2-\left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}\right)\right\} \qquad (2.13)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(R,\tau) = \sigma_{\varphi\varphi}(R,\tau) = -\frac{\gamma-2}{\gamma}\sigma_0 R^{c_1}\left\{\delta\left(\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)-\right.$$

$$-H\left(\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)\left[\frac{\alpha_0 \ln R^{-1}}{\sqrt{\tau^2-\left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} J_1\left(\alpha_0\sqrt{\gamma}\sqrt{\tau^2-\left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}\right)-\right.$$

$$-b\sqrt{\gamma}\exp\left[-d\sqrt{\gamma}\left(\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)\right]-b\alpha_0\sqrt{\gamma}R^{-d}\int_0^{\sqrt{\tau^2-\left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} \exp\left[-d\sqrt{\gamma}\sqrt{\tau^2-u^2}\right]\times$$

$$\left.\left.\times J_1(\alpha_0\sqrt{\gamma}\,u)\,du\right]\right\} \qquad (2.14)$$

где H—функция Хевисайда, J_1—функция Бесселя.

В радиально-неоднородном упругом шаре при действии на его поверхности давлений, зависящих только от времени, распространяются волны перемещений и напряжений, фронт которых в любой $\tau>0$ определяется уравнением

$$\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}=0 \qquad (2.15)$$

Уравнение (2.15) определяет сферу с радиусом $R=\exp(-\sqrt{\gamma}\,\tau)$. Быстрое убывание по времени радиуса фронта волны приводит к тому, что волны перемещений и напряжений оказывают существенное воздействие вблизи поверхности шара. Эти волны не доходят до центра шара и, следовательно, от центра отраженных волн не возникают.

В формулах (2.12)—(2.14) члены под функции Хевисайда описывают волны, которые не возникают в однородной среде. Она распространяется со следом и ее появление можно объяснить дисперсией проходящих волн в неоднородной среде. Вблизи фронта (2.15) так называемая волна со следом имеет конечный разрыв, который следует из формул (2.12)—(2.14), если учесть, что предел $z^{-1}J_1(bz)$ при $z\to 0$ конечный.

Рассмотрим установившиеся волны в радиально-неоднородном шаре. При граничном условии $f(\tau)=\sigma_0 e^{i\omega\tau}$ получим

$$u_r(R,\tau)=-\frac{\tau_0\sigma_0 R^{d+1}\exp(i\Omega)}{\gamma v_d(\gamma-d)} \qquad (2.16)$$

где фаза Ω определяется соотношением

$$\Omega=\omega\tau-\ln R^{-1}\sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma}-c^2-\frac{1}{\gamma-2}} \qquad (2.17)$$

Из условия $\Omega=\text{const}$ определяется фазовая скорость

$$v_\phi=\frac{d(1-R)}{d\tau}=\frac{\omega R}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma}-c^2-\frac{1}{\gamma-2}}} \qquad (2.18)$$

Волновое число следующее

$$K(\omega)=\frac{\omega}{v_\phi}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma}-c^2-\frac{1}{\gamma-2}} \qquad (2.19)$$

Для групповой скорости получим выражение

$$v_c=\frac{d\omega}{dK}=\frac{R\gamma}{\omega}\sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma}-c^2-\frac{1}{\gamma-2}} \qquad (2.20)$$

Фазовая и групповая скорости зависят, как видно из формул (2.18) и (2.20), от частоты ω, координаты R и величины γ.

При частотах, меньше предельного

$$\omega^*=\sqrt{\gamma\left(c^2+\frac{1}{\gamma-2}\right)} \qquad (2.21)$$

в радиально-неоднородном шаре появляются стоячие колебания.

3. *Резонансные частоты радиально-неоднородного упругого шара*

при стоячих колебаниях. Расcмотрим решение системы уравнений (1.13) — (1.15), полагая, что обобщенные потенциалы имеют вид

$$\Phi_i^*(R, \vartheta, \tau)=\varphi_i(R)P_n(\cos\vartheta)e^{i\omega\tau}, \quad i=1, 2, 3 \tag{3.1}$$

где $P_n(\cos\vartheta)$ — функция Лежандра, и на поверхности шара радиальное и касательные напряжения равны нулю.

Подставляя (3.1) в (1.13) — (1.15) и (1.4), имеем систему уравнений

$$\frac{d^2\varphi_1}{dR^2}+\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{d\varphi_1}{dR}-\left[n(n+1)+\frac{1}{\gamma-2}-\frac{\omega^2}{\gamma}\right]\frac{\varphi_1}{R^2}=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dR^2}+\frac{4}{(\gamma-2)R}\frac{d\varphi_2}{dR}-\left[n(n+1)+\frac{4\gamma}{\gamma-2}-\omega^2\right]\frac{\varphi_2}{R^2}=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dR^2}+\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{d\varphi_3}{dR}-\left[n(n+1)+\frac{\gamma}{\gamma-2}-\omega^2\right]\frac{\varphi_3}{R^2}=0 \tag{3.4}$$

при граничном условии

$$\left\{\mu_0R^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\left[(\gamma-2)\Theta+2\frac{\partial u_r}{\partial R}\right]\right\}\Big|_{R=1}=0 \tag{3.5}$$

$$\left\{\mu_0R^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta}+\frac{\partial u_\vartheta}{\partial R}-\frac{u_\vartheta}{R}\right]\right\}\Big|_{R=1}=0 \tag{3.6}$$

$$\left\{\mu_0R^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi}{R}\right]\right\}\Big|_{R=1}=0 \tag{3.7}$$

где

$$u_r=r_0\left[\frac{d\varphi_1}{dR}-n(n+1)R^{-\frac{\gamma}{\gamma-2}}\varphi_2\right]P_n(\cos\vartheta) \tag{3.8}$$

$$u_\vartheta=r_0\left[\frac{\varphi_1}{R}-R^{-\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}\frac{d(R\varphi_2)}{dR}\right]\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \tag{3.9}$$

$$u_\varphi=-\frac{r_0}{R}\varphi_3\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \tag{3.10}$$

Решение уравнений Эйлера (3.2) — (3.4), при условии ограниченности в центре шара, следующие:

$$\varphi_1(R)=A_nR^{\alpha_n-1}; \quad \varphi_2(R)=B_nR^{\beta_n-1}; \quad \varphi_3(R)=C_nR^{\delta_n-1} \tag{3.11}$$

где A_n, B_n, C_n — произвольные постоянные.

$$\alpha_n=\sqrt{a_n^2-\frac{\omega^2}{\gamma}}; \quad \beta_n=\sqrt{b_n^2-\omega^2}; \quad \delta_n=\sqrt{c_n^2-\omega^2}$$

$$a_n^2 = n(n+1) + c^2 + \frac{4}{\gamma-2};\ b_n^2 = n(n+1) + c^2 + \frac{4\gamma}{\gamma-2};\ c_n^2 = n(n+1) + c^2 + \frac{4}{\gamma-2}$$

Радиальные колебания неоднородного упругого шара имеют место при $n=0$. Решения (3.11) при $n=0$ с граничным условием (3.5) — (3.7) дает уравнение частот

$$(\varepsilon_0 - c)(\varepsilon_0 - d) = 0 \tag{3.12}$$

Корни уравнения (3.12), определяющие резонансные частоты радиальных колебаний, следующие:

$$\omega_{1p} = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-2}};\quad \omega_{2p} = 2\sqrt{\frac{3\gamma-1}{\gamma}} \tag{3.13}$$

При $n>0$, подставляя (3.11) в граничное условие (3.5) — (3.7), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно A_n, B_n, C_n. Условие, при котором однородная система имеет нетривиальное решение, следующее:

$$\Delta_n(\omega) = \{(\varepsilon_n - c)[\gamma(\varepsilon_n - c) + \gamma - 4] - (\gamma-2)n(n+1)\}[(\varepsilon_n - c)(\varepsilon_n - c - 2) +$$
$$+ n(n+1)] - 4n(n+1)(\varepsilon_n - c - 1)(\varepsilon_n - c - 3) = 0 \tag{3.14}$$

Таблица 1

Корни уравнения частоты $\Delta_n(\omega)=0$

γ \ n	0	1	2	3	4	5	6
2.5	2.3665 4.4722	0.0016 2.8617 4.4722	1.2245 4.0385 4.4722	1.6942 4.4722 5.4739	2.2565 4.4722 6.9535	2.9270 4.4722 8.3669	3.6715 4.4722
3	2.5821 3.464[illegible]	2.5821 3.4642	0.6030 3.0817 3.4642	1.3040 3.4642 4.1854	1.9568 3.4642 5.4777	2.6991 3.4642	3.4612 3.5126
10	2.[illegible]362 3.[illegible]849	0.0[illegible]33 2.2362 2.643[illegible]	1.4912 2.236[illegible]	2.2362 2.4089	2.2362 3.3412	2.2362 4.2849	2.2362 5.2334

Корни уравнения (3.14) определяют безразмерную величину резонансных частот радиально-неоднородного упругого шара, которые для некоторых n и γ приведены в табл. 1.

WAVES PROPOGATION IN RADIALLY NON-HOMOGENEOUS ELASTIC SPHERE

S. G. SAHAKIAN

ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՃԱՌԱԳԱՅԹԱ-ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳՆԴՈՒՄ

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ամփոփում

Ճառագայթա-անհամասեռ առաձգական գնդի համար լուծված է եզրային խնդիր, երբ հայտնի են ճառագայթային և շոշափող լարումները մակերևույթի վրա: Ներկայացնելով տեղափոխության վեկտորը ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով, անհամասեռ առաձգական միջավայրի շարժման վեկտորական հավասարումը տրոհվել է երեք իրարից անկախ սկալյար դիֆերենցիալ հավասարումների: Կանգնած ալիքների դեպքում որոշվել են սեփական հաճախությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саакян С. Г.* Независимые скалярные уравнения движения некоторых радиально-неоднородных изотропных упругих сред.—Докл. АН Арм. ССР, 1987, т. 85, № 1.
2. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.—М.: Наука, 1971. 288 с.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
6.II.1989