

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

БЕЛОКОНЬ А. В., ИЗОСКИМОВА Т. Н.

В настоящее время широкое распространение, как при изучении статических, так и динамических задач теории упругости, получил метод граничных интегральных уравнений [1]. Основным его достоинством является понижение размерности пространства, в котором ищутся неизвестные функции. Использование этого метода в случае нестационарной задачи о деформировании анизотропного прямоугольника приводит к необходимости решать систему, состоящую из четырех сингулярных уравнений, удовлетворяя при этом приближенно всем граничным условиям. В данной работе показывается, как эту же задачу, используя идеи метода суперпозиции [2, 3] и введения в рассмотрение вспомогательной задачи [4], можно свести к одному интегральному уравнению, зависящему от параметра преобразования Лапласа. При этом удается удовлетворить точно всем граничным условиям, кроме одного, что существенно отличает предлагаемый подход от классического метода граничных интегральных уравнений. Для решения интегрального уравнения в данной работе применяется метод Бубнова-Галеркина. Решение же, зависящее от времени, получается путем численного обращения Лапласа, для чего используется метод регуляризации А. Н. Тихонова [5]. Эффективность предлагаемого подхода проиллюстрирована на числовом примере.

Рассмотрим динамическую задачу о деформировании упругого анизотропного прямоугольника, занимающего в плоскости Ox_1x_3 область $\Pi = [-a; a] \times [-b; b]$. Предполагаем, что на границах прямоугольника заданы напряжения, распределенные таким образом, что осуществляется симметричное деформирование.

После применения преобразования Лапласа поставленная задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_{xx} + c_{14}u_{xz} + (c_{13} + c_{44})v_{xz} &= p^2 u \\ (c_{43} + c_{34})u_{xz} + c_{44}v_{xx} + c_{33}v_{zz} &= p^2 v \end{aligned}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= c_{13}u_x + c_{33}v_x = g_1(x; p) \\ \sigma_{zz} &= c_{44}(u_z + v_z) = 0, \text{ если } |x| \leq x_0, z = \pm 1 \\ \sigma_{xx} &= u_x + c_{13}v_x = g_2(z; p) \end{aligned}$$

$$\sigma_{xz} = c_{44}(u_x + v_z) = 0, \text{ если } x = \pm \gamma, |z| \leq 1$$

где $x = x_1/b$, $z = x_2/b$, $\tau = t/\tau_1$ — безразмерные координаты; $u = u_1/b$, $v = u_2/b$ — безразмерные компоненты вектора перемещений; $\gamma = \sqrt{\rho b^4/c_{11}^E}$; ρ — плотность материала; $c_{11} = c_{11}^E/c_{11}^E$, $c_{44} = c_{44}^E/c_{44}^E$, $c_{33} = c_{33}^E/c_{33}^E$ (c_{11}^E , c_{33}^E , c_{44}^E , c_{33}^E — модули упругости); $\eta = a/b$; p — параметр преобразования Лапласа.

Общее решение полученной граничной задачи, зависящей от параметра p , в соответствии с методом суперпозиции [2, 3] выберем в виде:

$$u(x, z, p) = F_0 \operatorname{sh} p x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1,2} a_{in} B_{in} \operatorname{ch} \delta_{in} z \sin \alpha_n (x - \gamma_i) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1,2} b_{ik} f_{ik} \operatorname{sh} \mu_{ik} x \cos \beta_k (z - 1) \quad (1)$$

$$v(x, z, p) = A_0 \operatorname{sh} \gamma_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1,2} B_{in} \operatorname{sh} \delta_{in} z \cos \alpha_n (x - \gamma_i) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1,2} D_{ik} \operatorname{ch} \mu_{ik} x \sin \beta_k (z - 1) \quad (2)$$

где B_{in} , D_{ik} — неизвестные постоянные; $\beta_k = k\pi$, $\alpha_n = n\pi/\gamma_i$; $\gamma_1 = p/\sqrt{c_{33}}$;

$$a_{in} = \frac{(c_{11} + c_{44}) \delta_{in}^2 \alpha_n}{c_{44} \delta_{in}^2 - \alpha_n^2 - p^2}, \quad b_{ik} = \frac{(c_{11} + c_{44}) \mu_{ik} \beta_k}{\beta_k^2 c_{44} + p^2 - \mu_{ik}^2}$$

δ_{in} и μ_{ik} — корни биквадратных уравнений:

$$c_{44} c_{33} \delta^4 + [(c_{11} + c_{44})^2 \alpha_n^2 - c_{44} (c_{11} \alpha_n^2 + p^2) - c_{33} (\alpha_n^2 + p^2)] \delta^2 + (\alpha_n^2 + p^2) (c_{11} \alpha_n^2 + p^2) = 0 \\ c_{44} \mu^4 + [(c_{11} + c_{44})^2 \beta_k^2 - c_{44} (c_{11} \beta_k^2 + p^2) - (c_{33} \beta_k^2 + p^2)] \mu^2 + (c_{44} \beta_k^2 + p^2) (c_{33} \beta_k^2 + p^2) = 0 \\ i = 1, 2$$

причем $\delta_{1n} > \delta_{2n} > 0$ и $\mu_{1k} > \mu_{2k} > 0$, если корни действительные; $\delta_{1n} = \bar{\delta}_{2n}$ и $\mu_{1k} = \bar{\mu}_{2k}$, если они комплексные.

Следуя [4], строим вспомогательную задачу, допускающую решение в замкнутой форме. Для этого вместо нормальных напряжений считаем заданными на границах нормальные перемещения. В результате коэффициенты, входящие в (1), (2), выражаются через перемещения на границах $f_1(x; p)$, $f_2(z; p)$ следующим образом:

$$A_0 = \frac{f_{10}}{\operatorname{sh} \gamma_1}, \quad B_{2n} = \frac{f_{1n}}{l_n \operatorname{sh} \delta_{1n} + \operatorname{sh} \delta_{2n}}, \quad B_{1n} = l_n B_{2n} \\ F_0 = \frac{f_{20}}{\operatorname{sh} p \gamma_1}, \quad D_{2k} = \frac{f_{2k}}{b_{1k} m_k \operatorname{sh} \mu_{1k} \gamma_1 + b_{2k} \operatorname{sh} \mu_{2k} \gamma_1}, \quad D_{1k} = m_k D_{2k}$$

где

$$l_n = \frac{\gamma_1 - a_{2n} \delta_{2n}}{a_{1n} \delta_{1n} - \gamma_1} \frac{\operatorname{sh} \delta_{2n}}{\operatorname{sh} \delta_{1n}}, \quad m_k = \frac{b_{2k} \beta_k - \mu_{2k}}{\mu_{1k} - b_{1k} \beta_k} \frac{\operatorname{sh} \mu_{2k} \gamma_1}{\operatorname{sh} \mu_{1k} \gamma_1}$$

$$f_{10} = \frac{1}{2\eta_1} \int_{-\eta_1}^{\eta_1} f_1(x; p) dx, \quad f_{1n} = \frac{1}{\eta_1} \int_{-\eta_1}^{\eta_1} f_1(x; p) \cos z_n(x - \tau_1) dx$$

$$f_{20} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_2(z; p) dz, \quad f_{2k} = \int_{-1}^1 f_2(z; p) \cos \beta_k(z-1) dz$$

Для определения функций $f_1(x; p)$, $f_2(z; p)$, выполняя граничные условия для нормальных напряжений исходной задачи, получаем систему интегральных уравнений, которую можно упростить, выразив $f_1(x; p)$ через $f_2(z; p)$ по следующим формулам:

$$f_{10} = \left(g_{20} - c_{11} f_{10} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{12} p^2}{p^2 + \alpha_n^2} f_{1n} \right) / (p \operatorname{cth} p \eta_1)$$

$$f_{1k} = \left(g_{2k} - \int_{-\eta_1}^{\eta_1} \tilde{B}_k(x; p) f_1(x; p) dx \right) / A_k(p)$$

Относительно неизвестной функции $f_2(z; p)$ имеем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{B}_k(x; p)}{A_k(p)} \int_{-\eta_1}^{\eta_1} \tilde{B}_k(x; p) f_1(x; p) dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_k(p)}{\eta_1} \cos z_n(x - \tau_1) \int_{-\eta_1}^{\eta_1} f_1(x; p) \cos z_n \times \\ \times (x - \tau_1) dx + \frac{c_{12}^2 p}{\operatorname{sh} 2 p \eta_1} \operatorname{ch} p x \int_{-\eta_1}^{\eta_1} \operatorname{ch} p x f_1(x; p) dx - \frac{c_{11} \eta_1}{2 \eta_1} \operatorname{cth} \eta_1 \int_{-\eta_1}^{\eta_1} f_1(x; p) dx - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{B}_k(x; p)}{A_k(p)} g_{2k} - \frac{c_{11}}{\operatorname{ch} p \eta_1} \operatorname{ch} p x g_{20} = -g_1(x; p) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\tilde{B}_k(x; p) = [(c_{13} b_{1k} \mu_{1k} + c_{21} \beta_k) m_k \operatorname{ch} \mu_{1k} x + (c_{12} b_{2k} \mu_{2k} + c_{22} \beta_k) \operatorname{ch} \mu_{2k} x] / r_k$$

$$A_k(p) = [(b_{1k} \mu_{1k} + c_{13} \beta_k) m_k \operatorname{ch} \mu_{1k} \eta_1 + (b_{2k} \mu_{2k} + c_{21} \beta_k) \operatorname{ch} \mu_{2k} \eta_1] / r_k$$

$$\tilde{A}_n(p) = [(c_{12} \alpha_n a_{1n} + c_{23} \hat{\alpha}_{1n}) l_n \operatorname{ch} \hat{\alpha}_{1n} + (c_{13} \alpha_n a_{2n} + c_{23} \hat{\alpha}_{2n}) \operatorname{ch} \hat{\alpha}_{2n}] / l_n$$

$$l_n = l_n \operatorname{sh} \hat{\alpha}_{1n} + \operatorname{sh} \hat{\alpha}_{2n}; \quad r_k = b_{1k} m_k \operatorname{sh} \mu_{1k} \eta_1 + b_{2k} \operatorname{sh} \mu_{2k} \eta_1$$

$$g_{20} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g_2(z; p) dz; \quad g_{2k} = \int_{-1}^1 g_2(z; p) \cos \beta_k(z-1) dz$$

Отметим, что при получении уравнения (3), были точно удовлетворены граничные условия

$$\sigma_{xx} = u_x + c_{13} v_z = g_1(z; p)$$

$$\sigma_{xz} = c_{44}(u_z + v_x) = 0, \quad \text{если} \quad x = \pm \eta_1, \quad |z| \leq 1$$

$$\sigma_{xz} = c_{44}(u_z + v_x) = 0, \quad \text{если } |x| \leq x_0, \quad z = \pm 1$$

Для решения интегрального уравнения (3) можно использовать различные методы, например, метод аппроксимации сплайнами, метод Бубнова-Галеркина и др. В работе применяется метод Бубнова-Галеркина, который основывается на аппроксимации перемещений на границе функцией вида $A(p) + B(p)x^2$.

Разработанная методика численно-аналитического исследования нестационарных процессов деформирования является удобной основой для эффективного решения разнообразных конкретных задач соответствующего типа.

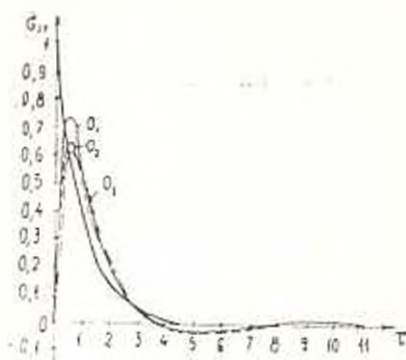
В качестве примера было изучено поведение напряжений в анизотропной прямоугольной области, находящейся под действием нестационарной равномерно распределенной нагрузки, приложенной нормально и симметрично вдоль ее боковых краев, эквивалентно убывающей по времени: $\exp(-\varepsilon t)$, где $\varepsilon = \{1; 10\}$. Расчеты проводились для нескольких геометрических размеров $\eta = \{1, 2, 3\}$. При этом в качестве упругих постоянных использовались модули упругости при нулевом электрическом поле для пьезокерамики ЦТС-19.

Следует иметь в виду, что в каждом конкретном случае точность численного исследования существенно зависит от выбора значения параметра регуляризации, а также шага разбиения. Расчеты показали, что при выполнении процедуры численного обращения Лапласа при нагрузках $\exp(-t)$, $\exp(-10t)$ целесообразно выбирать значения параметра регуляризации 10^{-6} , 10^{-7} соответственно, а шаг сетки — равным 0,033. Уменьшение шага (0,02) существенно не улучшает точность решения, однако, позволяет значительно увеличить интервал времени.

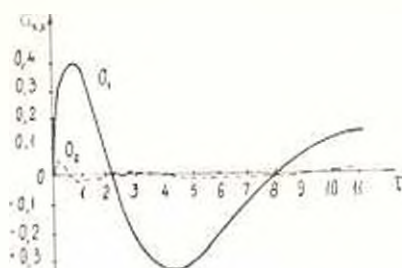
На точность решения как функций времени значительно влияет также погрешность, получаемая для изображений. В основном, она не превышает 1% относительной погрешности за исключением нескольких точек p_1 , в которых может достигать 5%. Это обусловлено медленной сходимостью рядов для напряжений на границе области.

Критерием для оценки качества полученного по изложенному методу решения являлась точность удовлетворения граничным условиям. Вычисления показали, что относительная ошибка для нормальных напряжений σ_{zz} , заданных на сторонах прямоугольника, в узловых точках τ_1 не превышает 6% для $\varepsilon = 1$ и 10% для $\varepsilon = 10$. Кривые условия для нормальных σ_{xx} и касательных напряжений удовлетворяются точно.

Определенный интерес в рассматриваемой задаче представляет изучение характера изменения напряжений по длине прямоугольника с течением времени. На фиг. 1, 2 показано распределение напряжений для $\varepsilon = 1$, $\eta = 3$ вдоль нагруженной стороны, где сплошной линией дано поведение напряжений на интервале $[0, 11]$ в точке $O_1(0; 0,8)$; штриховой — в точке $O_2(\eta = 0,06; 0,8)$, штрихпунктирной — в точке $O_3(\eta; 0,8)$. На самом деле, значения напряжений получены на $[0, 19]$, но ввиду малости с ростом τ их значения на фигурах не приводятся.



Фиг. 1



Фиг. 2

Как и следовало ожидать, изменение напряжений с течением времени в точках прямоугольника протекает по типу волнового затухающего процесса. Первое максимальное значение во всех рассматриваемых случаях является наибольшим и достигается достаточно быстро после момента нагружения. Причем, что касается напряжений σ_{xx} , чем ближе расположена точка к ненагруженной стороне, тем меньше в ней наибольшее значение напряжения и раньше оно наступает. Например, для квадрата при параметре $\nu=1$ и точке O_1 наибольшее значение принимает в момент времени $\tau=0,46$ и равно 0,4205, в точке O_2 — в момент $\tau=0,22$ и равно 0,0713. В точке O_3 напряжения σ_{zz} равны нулю, так как она принадлежит свободной от нагрузок границе.

С уменьшением отношения сторон для фиксированного $\epsilon=10$ максимальные значения σ_{xx} в рассматриваемых точках отличаются незначительно, так же, как и соответствующие им моменты времени. Исключение составляет точка O_1 в квадрате, где имеет место небольшой рост напряжений σ_{xx} . Для $\epsilon=1$ картина несколько иная. Здесь при малом изменении величин наибольших значений σ_{xx} в точке O_1 наблюдается сдвиг экстремальных значений по времени: чем меньше вытянут прямоугольник, тем раньше достигается максимальное напряжение. Так, для $\eta=3$ максимальное значение σ_{xx} наступает в момент времени $\tau=0,82$, для $\eta=2$ $\tau=0,71$, для $\eta=1$ $\tau=0,46$.

Максимальные напряжения σ_{zz} , действующие в направлении приложенной нагрузки, в этих же точках значительно превосходят соответствующие значения σ_{xx} .

При проведении сравнения вычисленных напряжений σ_{xx} заметно, что для всех рассматриваемых размеров и нагрузок наибольшие их значения убывают по мере приближения точки к ненагруженной стороне, причем в точках O_1 , O_2 достигаются одновременно, а в точке O_3 несколько позже. Это хорошо видно на фиг. 1.

При анализе численных результатов следует отметить, что с уменьшением отношения сторон для фиксированной нагрузки наблюдается незначительный рост максимальных напряжений σ_{zz} во всех рассматриваемых точках. При этом наибольших значений напряжения σ_{xx}

достигают одновременно в соответствующих точках для всех взятых размеров прямоугольника, за исключением случая $\nu=1$, $\eta=1$, когда имеет место смещение их к началу нагружения.

Характерной особенностью всех рассматриваемых случаев является тот факт, что максимальных значений напряжения $\sigma_{\max}$ достигают в тот момент времени, когда нагрузка резко падает.

Построенный алгоритм решения нестационарной задачи для анизотропного прямоугольника позволяет провести подробный кинематический анализ процесса деформирования. Для этого необходимо использовать выражения для компонентов вектора перемещений (1), (2).

DYNAMIC PROBLEM FOR AN ANISOTROPIC RECTANGLE

A. V. BELOKON, T. N. IZOSIMOVA

ԱՆԻՍՈՏՐՈՊ ՈՐՏՈՆԱՅԻՆ ՀԱՄԱՐ ԳԻՆԱՄՈՒԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐ

Ա. Վ. ԲԵԼՈՔՈՆ, Տ. Ն. ԻԶՈՍԻՄՈՎԱ

Ա մ փ ո փ ո ս ւ մ

Անիզոտրոպ շաղկապված է անիզոտրոպ ուղղանկյան դեֆորմացման մասին ոչ ստացիոնար խնդրի լուծման մեթոդ: Ուղղանկյան եզրերում լարումները բաշխված են այնպես, որ սեղի ունի սիմետրիկ դեֆորմացում: Համադրման մեթոդով խնդիրը բերված է մեկ ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Դա հնարավորություն է տալիս բաժարարել բոլոր եզրային պայմաններին ճշգրիտ, բացի մեկից: Ինտեգրալ հավասարումը լուծվում է թուրքոմ-Գալյորկինի մեթոդով: Բերված է թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Угоди́чиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела.—Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. 296 с.
2. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра.—Докл. АН Арм. ССР, 1954, т. 19, № 1, с. 3—12.
3. Грикченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.—Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
4. Белоконь А. В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров.—Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 1, с. 56—59.
5. Тихонов А. Н., Арсеник В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979. 288 с.

Ростовский государственный
университет

Поступила в редакцию
2.XII.1988