

УДК 539.3

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОНЕЧНЫХ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТРЕЩИН В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

АФЯН Б. А., СТЕПАНЯН С. П.

Особое значение в механике разрушения имеют задачи о конечной и полубесконечной трещинах в полуплоскости, поскольку с их помощью можно оценить влияние границы тела на распределение напряжений, когда трещина расположена вблизи границы.

В данной работе получено приближенное решение плоской задачи теории упругости для полуплоскости с конечными и полубесконечными трещинами (фиг. 1). Вся граница полуплоскости жестко заземлена, а на поверхностях трещин заданы самоуравновешанные нагрузки:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p_0(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q_0(x)$$

$$|x| \in (0, a) \cup (b, +\infty)$$

$$\sigma_{xx}(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0$$

$$y \in (0, c) \cup (d, +\infty)$$

$$u(x, -h) = v(x, -h) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

1. Вывод интегрального уравнения.

Рассматриваются следующие задачи теории упругости:

а) первая основная задача теории упругости для квадранта ($0 < x, y < +\infty$)

$$\sigma_{xx}(0, y) = \sigma_1(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad (0 < y < \infty)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q_1(x) \quad (0 < x < \infty)$$

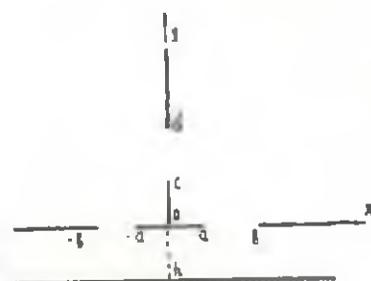
б) смешанная задача теории упругости для полосы ($-\infty < x < \infty, -h < y < 0$)

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q_1(x), \quad u(x, -h) = v(x, -h) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

где

$$p_1(x) = \begin{cases} p_0(x), & x \in (0, a) \cup (b, +\infty) \\ p(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$

$$q_1(x) = \begin{cases} q_0(x), & x \in (0, a) \cup (b, +\infty) \\ q(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$



Фиг. 1

соответственно симметричная и антисимметричная функции относительно точки 0,

$$\varepsilon_3(y) = \begin{cases} \varepsilon_0(y), & y \in (0, c) \cup (d, +\infty) \\ \varepsilon(y), & y \in (c, d) \end{cases}$$

В [1] найдены перемещения от неизвестных напряжений $p(x)$, $q(x)$ и $\sigma(y)$ ($x \in (a, b)$, $y \in (c, d)$)

для задачи (1.1):

$$\begin{aligned} Eu'_x(x, 0^+) &= (1-\nu)p_1(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} R_1(t, x) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_2(t, x) q_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_7(t, x) \varepsilon_3(t) dt \\ Ev'_x(x, 0^+) &= (\nu-1)q_1(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right] p_1(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} R_3(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_4(t, x) q_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_6(t, x) \varepsilon_3(t) dt \\ Eu'_x(0, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{y-t} - \frac{1}{y+t} \right] \varepsilon_3(t) dt - \int_0^{\infty} R_5(t, y) p_1(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} R_8(t, y) q_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_2(t, y) \varepsilon_3(t) dt \end{aligned}$$

для задачи (1.2):

$$\begin{aligned} Eu'_x(x, 0^+) &= (1-\nu)p(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} K_1(t, x) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} K_3(t, x) q_1(t) dt \\ Ev'_x(x, 0^+) &= (\nu-1)q_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right] p_1(t) dt - \\ &- \int_0^{\infty} K_2(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} K_4(t, x) q_1(t) dt \end{aligned}$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно; $R_l(t, x)$ и $K_j(t, x)$, ($l=1, 7, j=1, 4$) — регулярные функции [1].

↑требуя обращения в нуль скачков перемещений

$$u_x(x, 0^+) - u_x(x, 0^-) = 0, \quad v_x(x, 0^+) - v_x(x, 0^-) = 0 \quad (1.3)$$

и удовлетворяя условию симметрии

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

получим интегральные уравнения поставленной задачи

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_a^b \frac{p(t)}{x-t} dt + \int_a^b M_{1,1}(t, x) p(t) dt + \int_a^b M_{1,2}(t, x) q(t) dt + \\ + \int_c^d R_4(t, x) z(t) dt = F_1(x), \quad x \in (a, b) \\ \frac{4}{\pi} \int_a^b \frac{q(t)}{x-t} dt + \int_a^b M_{2,1}(t, x) p(t) dt + \int_a^b M_{2,2}(t, x) q(t) dt - \\ - \int_c^d R_7(t, x) z(t) dt = F_2(x), \quad x \in (a, b) \\ \frac{2}{\pi} \int_c^d \frac{z(t)}{x-t} dt - \int_a^b R_8(t, x) p(t) dt + \int_a^b R_5(t, x) q(t) dt + \\ + \int_c^d R_9(t, x) z(t) dt = F_3(x), \quad x \in (c, d) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь ядра $M_{ij}(t, x)$ ($i, j = 1, 2$) и правые части $F_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) определяются из (1.3) и (1.4). Уравнения (1.5) представляют собой систему сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядром Коши и регулярной частью. Функции $p(t)$, $q(t)$ и $z(t)$ удовлетворяют условиям равновесия

$$\begin{aligned} \int_a^b p(t) dt = - \int_0^a p_2(t) dt - \int_b^{\infty} p_0(t) dt, \quad \int_a^b q(t) dt = - \int_0^a q_0(t) dt - \int_b^{\infty} q_0(t) dt \\ \int_c^d z(t) dt = - \int_0^c z_0(t) dt - \int_d^{\infty} z_0(t) dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

После замены переменных $x = \frac{b-a}{2} z + \frac{a+b}{2}$, $t = \frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}$ при $t, x \in (a, b)$ и $x = \frac{d-c}{2} z + \frac{d+c}{2}$, $t = \frac{d-c}{2} y + \frac{d+c}{2}$ при $t, x \in (c, d)$, уравнения (1.5) и (1.6) преобразуются к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(y)}{z-y} dy + \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 N_{ij}(y, z) \Phi_j(y) dy = \varphi_i(z), \quad z \in (-1, 1) \quad (1.7)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi_i(y) dy = c_i, \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.8)$$

где $\Phi_1(y) = p \left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2} \right)$, $\Phi_2(y) = q \left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2} \right)$, $\Phi_3(y) = r \left(\frac{d-c}{2} y + \frac{d+c}{2} \right)$, а остальные функции $\varphi_i(z)$, $N_{ij}(y, z)$ ($i, j=1, 2, 3$) определяются аналогичным образом.

2. *Определение коэффициентов интенсивности напряжений.* Решение системы (1.7) при условии (1.8) в классе функций, не ограниченных при $y = \pm 1$, то есть

$$\Phi_i(y) = (1-y^2)^{-1/2} W_i(y) \quad (i=1, 2, 3)$$

где $W_i(y)$ — непрерывные функции на отрезке $[-1, 1]$, существует и единственно [2].

Численное решение (1.7) получим с помощью квадратурных формул Гаусса [3]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x-y_m)} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{x_k - y_m} \quad (2.1)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (2.2)$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad y_m = \cos \frac{\pi m}{n}, \quad (k=1, 2, \dots, n; m=1, 2, \dots, n-1) \quad (2.3)$$

Применим квадратурные формулы (2.1) и (2.2) к уравнениям (1.7) и интегралам (1.8). В результате получим систему $3n$ линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W_i(x_k) \left| \frac{1}{y_m - x_k} + \pi \sum_{j=1}^3 N_{ij}(x_k, y_m) \right| = \varphi_i(y_m)$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n W_i(x_k) = c_i \quad (i=1, 2, 3)$$

для определения $3n$ неизвестных $W_i(x_k)$ ($i=1, 2, 3, k=1, 2, \dots, n$).

Заметим, что сходимость процесса при гладких функциях $\varphi_i(z)$ и $N_{ij}(y, z)$ следует из сходимости квадратурных формул (2.1) и (2.2) и единственности решения уравнения (1.7) при условии (1.8).

Воспользовавшись интерполяционным полиномом Лагранжа [4]

$$W_i(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} W_i(x_k) \frac{T_n(y) \sqrt{1-x_k^2}}{y-x_k}$$

($T_n(y) = \cos(n \arccos y)$ — многочлены Чебышева), по узлам (2.3) найдем значения искомым функций $W_i(y)$ в точках $y = \pm 1$, через которые выражаются коэффициенты интенсивности напряжений.

В табл. 1 и 2 при различных значениях параметров d/a , b/a и h/a ($a=c$) приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений, в случае единичной нагрузки на трещинах $(-a, a)$ и $(0, c)$.

Таблица 1

$h/a=1, b/a=4$

d/a	2	2.5	3	3.5	4	5
$K_1(a) \sigma_0$	0.360	0.357	0.356	0.355	0.354	0.353
$K_2(a) \sigma_0$	0.014	0.016	0.017	0.019	0.019	0.019
$K_3(b) \sigma_0$	0.056	0.057	0.058	0.058	0.059	0.059
$K_4(b) \sigma_0$	0.001	0.001	0.0	0.0	0.0	0.0
$K_1(c) \sigma_0$	1.280	0.798	0.574	0.445	0.362	0.261
$K_1(d) \sigma_0$	0.387	0.188	0.112	0.074	0.053	0.032

Таблица 2

$h/a=5, b/a=4$

d/a	2	2.5	3	3.5	4	5
$K_1(a) \sigma_0$	0.399	0.397	0.395	0.395	0.394	0.393
$K_2(a) \sigma_0$	0.024	0.025	0.026	0.026	0.026	0.027
$K_3(b) \sigma_0$	0.041	0.042	0.042	0.043	0.043	0.044
$K_4(b) \sigma_0$	-0.003	-0.004	-0.004	-0.005	-0.005	-0.005
$K_1(c) \sigma_0$	1.279	0.798	0.574	0.445	0.362	0.261
$K_1(d) \sigma_0$	0.386	0.187	0.111	0.074	0.053	0.031

ABOUT INTERACTION OF FINITE AND SEMI-FINITE CRACKS IN ELASTIC HALF-PLANE

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

Ր. Ա. ԱՓԵԱՆ, Ս. Գ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Գրտարկված է վերջավոր և կիսաանվերջ ճարտարվ թույլացված կիսահարթության հավասարակշռությունը, երբ կիսահարթության եզրը կոշտ սահմանափակված է, իսկ ճարտարի վրա դրված են ինքնահավասարակշռված բեռներ։ Ուսումնասիրված է եզրի ազդեցությունը լարումների բաշխման վրա։ Ինքնահարթության ծայրահատեցում լարումների ինտենսիվության դարձակիցների համար բերված են թվային արժեքներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. Афан Б. А., Степаняк С. П. Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещиной.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1989, т. 42, №2, с. 50—57.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962. 511 с.
3. Erdogan F., E., Gupta G. On the numerical solutions of singular integral equations.—Quart. Appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.
4. Саурук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.—Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
16.III.1989