

УДК 539.3

БЕСКОНТАКТНЫЙ СПОСОБ ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКЕ

БАГДАСАРЯՆ Դ. Ե.

Показано, что при помощи постоянного магнитного поля вынужденные колебания одной пластинки, на которую действует возмущающая сила, можно бесконтактно сообщить ко второй пластинке, свободной от внешних механических нагрузок. Причем, соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы колебалась только вторая сверхпроводящая пластина с регулируемой амплитудой.

1. Рассмотрим магнитоупругую систему, показанную на фиг. 1. Она состоит из двух параллельных диафрагм, между которыми действует постоянное магнитное поле  $H_0$ , параллельное координатной линии  $ox_2$  (координатная система  $x_1, x_2, x_3$  и основные геометрические параметры показаны на фиг. 1).

Внутренние поверхности диафрагм  $x_3 = \pm b$  покрыты тонкими слоями сверхпроводящего сплава, толщины которых намного больше глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник (обычно порядка  $10^{-6}$  см). Части диафрагм  $|x_1| < a$ ,  $|x_2| < \infty$  являются упругими пластинками, изготовленными из различных изотропных материалов (остальные части являются абсолютно жесткими и неподвижными).



Фиг. 1

Пусть на внешней поверхности верхней пластинки действует нормально приложенная нестационарная нагрузка  $p(x_1, t)$ . Граничные условия на торцах  $x_1 = \pm a$  таковы, что пластинки колеблются по форме цилиндрической поверхности с образующими, параллельными координатной линии  $ox_2$ . Рассмотрим задачу передачи вынужденных колебаний к нижней пластинке и определим условия резонанса. В дальнейшем, характеристики, относящиеся к верхней пластинке, будем обозначать индексом „1“, а к нижней — „2“.

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие

токи, препятствующие проникновению магнитного поля внутрь тела. Вследствие этого на внутренних поверхностях пластинок  $x_2 = \pm b$  компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление поверхностных сил  $\vec{q}$  магнитного происхождения, действующих на поверхностях  $x_2 = \pm b$  и определяемых формулой [1]

$$\vec{q} = \vec{n} \cdot \vec{T} \quad (1.1)$$

Здесь  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к деформированным поверхностям пластинок,  $\vec{T}$  — тензор напряжений Максвелла [1]

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{H} \cdot \vec{H} \right] \quad (1.2)$$

где  $\vec{H}$  — вектор напряженности магнитного поля в вакуумном слое  $|x_2| < b$ , который складывается из вектора напряженности заданного магнитного поля  $\vec{H}_0$  и вектора напряженности индуцированного магнитного поля  $\vec{h}$ , обусловленного деформациями пластинок ( $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$ ).

Пусть для рассматриваемых пластинок справедлива гипотеза недеформируемых нормалей, согласно которой имеем следующие уравнения колебания [2]

$$D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_1^4} + 2\gamma_i^2 \delta_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{13}^{(1)+} + \sigma_{13}^{(1)-}) = \sigma_{33}^{(1)+} - \sigma_{33}^{(1)-} \quad (1.3)$$

Здесь  $w$  — прогиб,  $D_i = 2E_i \delta_i^3 / 3(1 - \nu_i^2)$  — цилиндрическая жесткость,  $E_i$  — модуль упругости,  $\nu_i$  — коэффициент Пуассона,  $2\delta_i$  — толщина,  $\rho_i$  — плотность  $i$ -той пластинки;  $\sigma_{13}^{(1)+}$  и  $\sigma_{13}^{(1)-}$  — упругие напряжения. Знаками „+“ и „-“ отмечены значения напряжений на верхних ( $x_2 = b + 2\delta_1$ ;  $x_2 = -b$ ) и нижних ( $x_2 = b$ ;  $x_2 = -b - 2\delta_2$ ) поверхностях соответственно.

Входящие в уравнения (1.3) неизвестные величины  $\sigma_{13}^{(1)\pm}$  и  $\sigma_{33}^{(1)\pm}$  определяем, используя условия на поверхностях  $x_2 = \pm b \pm 2\delta_i$  и  $x_2 = -b$  пластинок. В силу того, что магнитное поле в областях  $x_2 > b$  и  $x_2 < -b$  отсутствует, указанные условия запишутся в виде

$$\sigma_{ij} n_j = T_{ij} n_j \quad (1.4)$$

Из (1.4), с учетом (1.2), после линеаризации имеем

$$\sigma_{13}^{(1)+} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)+} = -p, \quad \sigma_{13}^{(2)-} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)-} = 0 \quad (1.5)$$

$$\sigma_{13}^{(1)-} = -\frac{H_0}{4\pi} h_1^+, \quad \sigma_{33}^{(1)-} = -\frac{H_0^2}{8\pi} - \frac{H_0}{4\pi} h_1^+, \quad \sigma_{13}^{(2)+} = \frac{H_0}{4\pi} h_3^-, \quad \sigma_{33}^{(2)+} = -\frac{H_0^2}{8\pi} - \frac{H_0}{4\pi} h_1^-$$

где

$$h_k^\pm = h_k(x_1, \pm b, t), \quad (k=1, 3)$$

2. Рассматривая систему уравнений (1.3), замечаем, что она не

замкнута. В нее, кроме прогибов  $w_1$  пластинок, входят неизвестные граничные значения  $h_{\pm}^{\pm}$  индуцированного в слое  $|x_2| < b$  магнитного поля  $\vec{h}$ . Их определяем, решая уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (2.1)$$

в области  $|x_2| < b$ , при следующих поверхностных условиях непроникновения магнитного поля в толщу пластинок:

$$(\vec{H}_0 + \vec{h}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{при } x_2 = \pm b \quad (2.2)$$

Введя потенциальную функцию  $\varphi$  посредством

$$\vec{h} = \operatorname{grad} \varphi \quad (2.3)$$

и учитывая, что части  $|x_1| > a$  поверхностей  $x_2 = \pm b$  не деформируются, задача определения индуцированного магнитного поля  $\vec{h}$ , согласно (2.1) и (2.2), после линеаризации сводится к решению следующей краевой задачи для уравнения Лапласа в слое  $|x_2| < b$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \begin{cases} H_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| < a, \quad x_2 = b \\ H_0 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| < a, \quad x_2 = -b \\ 0 & \text{при } |x_1| > a, \quad x_2 = \pm b \end{cases}$$

Задача (2.4) решена при помощи интегрального преобразования Фурье по переменной  $x_1$ . Используя это решение, из (2.3) определено индуцированное в слое  $|x_2| < b$  магнитное поле  $\vec{h}$  и путем предельного перехода ( $x_2 \rightarrow \pm b$ ) получены следующие представления интересующих нас величин  $h_{\pm}^{\pm}$ :

$$h_2^+ = H_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \quad h_2^- = H_0 \frac{\partial w_2}{\partial x_1}, \quad h_1^{\pm} = \frac{H_0}{4b} \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{K} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - K \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right] d\xi \quad (2.5)$$

$$h_1^- = \frac{H_0}{4b} \int_{-a}^a \left( K \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right) d\xi$$

где

$$K(x_1, \xi) = \operatorname{th} \frac{\pi(k-x_1)}{4b}$$

Подставляя (1.5) в (1.3) и учитывая (2.5), получим следующую систему связанных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений колебания пластинок:

$$D_k \frac{\partial^4 w_k}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \gamma_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} - \frac{H_0^2 \gamma_k}{4\pi} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_1^2} + \quad (2.6)$$

$$+ \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left( K \frac{\partial w_{3-k}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) d\xi = \frac{1 - (-1)^k}{2} p - (-1)^k \frac{H_0^2}{8\pi} \quad (k=1, 2)$$

К системе уравнений (2.6) в каждом конкретном случае необходимо присоединить обычные однородные условия закрепления краев  $x_1 = \pm a$  пластинок.

Из (2.6) видно, что благодаря магнитному полю, вынужденные колебания верхней пластинки (под действием возмущающей силы  $p$ ) передаются к нижней пластинке, которая свободна от внешних механических нагрузок.

Так как уравнения (2.6) и соответствующие граничные условия являются линейными, то решения поставленных задач можно искать в виде суммы

$$w_k(x_1, t) = w_k^{(1)}(x_1) + w_k^{(2)}(x_1, t)$$

где  $w_k^{(1)}$  есть решения уравнений

$$D_k \frac{d^4 w_k^{(1)}}{dx_1^4} + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left( K \frac{dw_{3-k}^{(1)}}{d\xi} - \frac{1}{K} \frac{dw_k^{(1)}}{d\xi} \right) d\xi - \frac{H_0^2 \gamma_k}{4\pi} \frac{d^2 w_k^{(1)}}{dx_1^2} = (-1)^{k-1} \frac{H_0^2}{8\pi} \quad (k=1, 2) \quad (2.7)$$

удовлетворяющие тем же граничным условиям, что и  $w_k$ , а  $w_k^{(2)}$  являются решениями уравнений

$$D_k \frac{\partial^4 w_k^{(2)}}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \gamma_k \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{H_0^2 \gamma_k}{4\pi} \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial x_1^2} + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left( K \frac{\partial w_{3-k}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial \xi} \right) d\xi = \quad (2.8)$$

$$= \frac{1 - (-1)^k}{2} p$$

при тех же граничных условиях.

Функции  $w_k^{(1)}$  представляют решения задач изгиба пластинок под действием магнитного поля при отсутствии механической нагрузки  $p(x_1, t)$ . Эти решения представляют интерес при определении прочностных характеристик рассматриваемых пластинок.

Решения  $w_k^{(2)}$  характеризуют процесс бесконтактной передачи вынужденных колебаний через зазор между пластинками при помощи постоянного магнитного поля. В дальнейшем будем ограничиваться решением лишь последней задачи, основанной на уравнении (2.8).

3. Предполагая, что  $p(x_1, t) = p_0(x_1) \sin \omega t$ , решение системы (2.8) представим в виде

$$w_k^{(2)}(x_1, t) = u_k(x_1) \sin \omega t$$

где  $u_k(x_1)$ , согласно (2.8), являются решениями следующей системы:

$$D_k \frac{d^4 u_k}{dx_1^4} + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left( K \frac{du_{2-k}}{d\xi} - \frac{1}{K} \frac{du_k}{d\xi} \right) d\xi - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi} \frac{d^2 u_k}{dx_1^2} - 2c_k \delta_k \omega^2 u_k = \frac{1 - (-1)^k}{2} p_0(x_1) \quad (3.1)$$

Пусть края пластинок  $x_1 = \pm a$  шарнирно оперты. Тогда решение системы (3.1), удовлетворяющее условиям шарнирного опирания, будем искать в виде

$$u_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_k^{(n)} \sin^{l_n}(x_1 + a), \quad l_n = \frac{n\pi}{2a} \quad (3.2)$$

где  $u_k^{(n)}$  — неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (3.2) в (3.1) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующим бесконечным системам неоднородных алгебраических уравнений относительно  $u_1^{(n)}$  и  $u_2^{(n)}$ :

$$(\omega_{km}^2 - \omega^2) u_1^{(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn}^{(1)} u_2^{(n)} - b_{mn}^{(1)} u_1^{(n)}] = c_n \quad (3.3)$$

$$(\omega_{km}^2 - \omega^2) u_2^{(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn}^{(2)} u_1^{(n)} - b_{mn}^{(2)} u_2^{(n)}] = 0$$

где

$$\omega_{km}^2 = \Omega_{km}^2 + \frac{H_0^2}{8\rho_k} \lambda_{km}^2, \quad \Omega_{km}^2 = \frac{D_k \lambda_{km}^4}{2g_k \delta_k}, \quad a_{mn}^{(k)} = \frac{H_0^2}{32\pi g_k \delta_k} a_{mn}^{(k)}, \quad b_{mn}^{(k)} = \frac{H_0^2}{32\pi g_k \delta_k} b_{mn}^{(k)} \quad (3.4)$$

$$a_{mn} = \frac{\lambda_n}{ab} \int_{-a}^a \cos^{l_n}(\xi + a) \sin^{l_m}(x_1 + a) \operatorname{th} \frac{\pi(x_1 - \xi)}{4b} dx_1 d\xi$$

$$b_{mn} = \frac{\lambda_n}{ab} \int_{-a}^a \cos^{l_n}(\xi + a) \sin^{l_m}(x_1 + a) \operatorname{cth} \frac{\pi(x_1 - \xi)}{4b} dx_1 d\xi$$

$$c_n = \frac{1}{2ap_k \delta_k} \int_{-a}^a p_0(x_1) \sin^{l_n}(x_1 + a) dx_1; \quad (k=1, 2; n, m=1, 2, 3, \dots)$$

В (3.4)  $\omega_{km}$  — частоты магнитоупругих колебаний отдельной пластинки,  $\Omega_{km}$  — собственные частоты пластин в отсутствии магнитного поля.

Используя (3.4) и имея в виду, что  $|a_{mn}| \ll A$ ,  $|b_{mn}| \ll B$ , где  $A$  и  $B$  некоторые постоянные, можно показать квазибылое регулярность системы (3.3) при любом значении  $H_0$ .

Из (3.3) в первом приближении для амплитуд  $u_1^{(1)}$  и  $u_2^{(1)}$ , в случае пластин с одинаковыми физическими и геометрическими параметрами ( $E_1=E_2=E$ ,  $\nu_1=\nu_2=\nu$ ,  $\delta_1=\delta_2=h$ ,  $\rho_1=\rho_2=\rho$ ), при  $p_0(x_1)=p_0=\text{const}$ , найдем

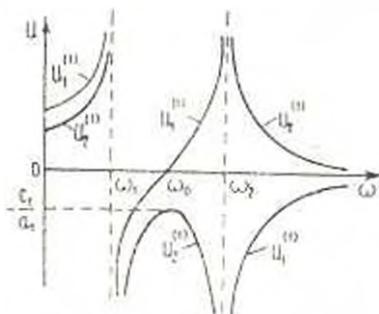
$$u_1^{(1)} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)c_1}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}, \quad u_2^{(1)} = \frac{a_1 c_1}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \quad (3.5)$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + (-1)^i \frac{H_0^2}{32\pi\rho h} a_{11}, \quad \omega_0^2 = \frac{D_1^2}{2\rho h} + \frac{H_0^2 \nu^2}{8\pi\rho} + \frac{H_0^2 b_{11}}{32\pi\rho h} \quad (3.6)$$

$$a_1 = \frac{H_0^2}{32\pi\rho h} a_{11}, \quad c_1 = \frac{2\rho_0}{\pi\rho h}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \omega_0^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}$$

$\omega_1$  и  $\omega_2$  — первая и вторая частоты собственных колебаний рассматриваемой магнитоупругой системы.



Фиг. 2

Зависимость  $u_1^{(1)}$  и  $u_2^{(1)}$  от частоты возмущающей силы  $\omega$  показана на фиг. 2. Из этой фигуры видно, что с возрастанием  $\omega$  обе амплитуды монотонно увеличиваются и стремятся к бесконечности, когда  $\omega$  приближается к первой собственной частоте  $\omega_1$  (наступление первого резонанса). В этой области ( $0 < \omega < \omega_1$ ) обе амплитуды положительны, то есть обе пластинки колеблются в фазе с возмущающей силой. Когда  $\omega_1 < \omega < \omega_0$ , амплитуды  $u_1^{(1)}$  и  $u_2^{(1)}$  имеют отрицательные значения, то есть обе пластинки колеблются со сдвигом фазы  $180^\circ$  относительно возмущающей силы, но еще находятся в одной фазе друг с другом. В интервале  $\omega_0 < \omega < \omega_2$  амплитуда  $u_1^{(1)}$  вновь становится положительной (переходя через нуль при  $\omega = \omega_0$ ), тогда как  $u_2^{(1)}$  остается отрицательной. Это значит, что в рассматриваемом интервале колебания обеих пластин сдвинуты по фазе на  $180^\circ$ , причем колебание верхней пластинки находится в одной фазе с возмущающей силой. Наконец, когда  $\omega$  приближается ко второй собственной частоте  $\omega_2$ , обе амплитуды неограниченно возрастают и наступают условия второго резонанса. После этого пластинки продолжают колебаться в различных фазах, но с убывающими амплитудами, и когда  $\omega$  очень велико, колебания обеих пластин почти исчезают.

Определенное практическое значение имеет  $u_1^{(1)} = 0$  при  $\omega = \omega_0$ . Это означает, что возмущающая сила, действуя на верхнюю пластинку, вызывает колебания только нижней пластинки. Амплитуда этих колебаний, как видно из (3.4)–(3.6), равна

$$u_2^{(0)} = \frac{32b\rho_0}{\pi H_0^2} \left( \int_0^1 \int_0^1 \cos \pi u \sin \pi v \operatorname{th} \frac{\pi a(u-v)}{2b} dudv \right)^{-1} \quad (3.7)$$

Таким образом, при помощи магнитного поля колебания (в том числе и резонансные) одной пластинки (на которой действует вынуждающая сила) бесконтактно передаются ко второй пластинке. Причем соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы колебалась только вторая (свободная от механических нагрузок) пластинка с регулируемой амплитудой. Как видно из (3.7), эта амплитуда весьма чувствительна к изменению величины  $H_0 \neq 0$  и, следовательно, при помощи достаточно слабого магнитного поля, можно сообщить колебания с достаточно большой амплитудой и наоборот.

## A NON-CONTACT METHOD OF RESONANT VIBRATION EXCITEMENT IN A SUPERCONDUCTIVE PLATE

G. E. BAGDASARIAN

### ԳԵՐՇԱՂՈՐԳԻՉ ՍԱԼՈՒՄ ԻՆԵՐՈՆԱՆՍԱՔՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ ԳՐԳՈՅԼՈՒ ՈՉ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴ

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍՐՅԱՆ

#### Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ հաստատուն մաղնիսական դաշտի օգնությամբ գերհաղորդիչ սալի ստիպողական տատանումները կարելի է առանց կոնտակտի հաղորդել մի այլ՝ երկրորդ գերհաղորդիչ սալի: Ընդ որում, խնդրի պարամետրերի համապատասխան ընտրությամբ կարելի է հասնել այն բանին, որ տատանվի (ղեկավարվող ամպլիտուլայով) միայն արտաքին մեխանիկական ազդեցություններից ազատ երկրորդ սալը:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.-М.: Гостехиздат, 1957, 532 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977 272 с.

Երևանский государственный университет

Поступила в редакцию  
8.VI.1988