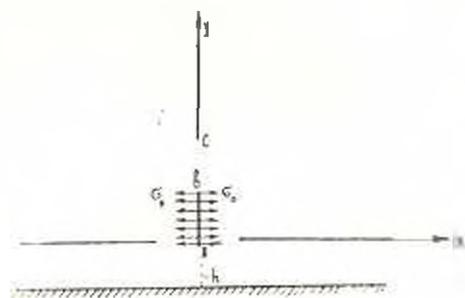


УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ,
 ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНОЙ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ
 ТРЕЩИНАМИ

АФЯН Б. А., СТЕПАНЯН С. П.

Рассматривается плоская задача теории упругости в напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, ослабленной конечной и полубесконечными трещинами (фиг. 1). Вся граница полуплоскости жестко закреплена, а на поверхностях трещины заданы напряжения



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, \pm 0) &= p_0(x), \quad \tau_{xy}(x, \pm 0) = q_0(x), \quad (x > a) \\ \sigma_{xx}(+0, y) &= \sigma_0(y), \quad \tau_{xy}(-0, y) = 0, \quad (0 < y < b, \quad c < y < \infty) \\ u(x, -h) &= v(x, -h) = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

В условии (1) $p_0(x)$ — симметричная, а $q_0(x)$ — антисимметричная функции относительно точки o .

Суть решения поставленной задачи заключается в разбиении исходной области, занятой деформируемым твердым телом на канонические области (квадрант и полюса) и склейке решений для этих областей (при соответствующих граничных условиях) на границе контакта.

В [1] получены соотношения между компонентами вектора смещений и тензора напряжений для квадранта и полюсы:

$$Eu_x(x, +0) = (1 - \nu)p_1(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} R_3(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_2(t, x) q_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_1(t, x) z_1(t) dt \\
Eu'_x(x, -0) &= (1 - \nu) p_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt + \\
& + \int_0^{\infty} K_1(t, x) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} K_2(t, x) q_1(t) dt \\
Ev'_x(x, +0) &= (\nu - 1) q_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] p_1(t) dt - \\
& + \int_0^{\infty} R_3(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_4(t, x) q_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_5(t, x) z_1(t) dt \\
Ev'_x(x, -0) &= (\nu - 1) q_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] p_1(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} K_3(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} K_4(t, x) q_1(t) dt \\
Ev'_y(0, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{y-t} - \frac{1}{y+t} \right] z_1(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} R_6(t, y) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_7(t, y) q_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_8(t, y) z_1(t) dt
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$p_1(x) = \begin{cases} p(x), & 0 < x < a \\ p_0(x), & a < x < \infty \end{cases}, \quad q_1(x) = \begin{cases} q(x), & 0 < x < a \\ q_0(x), & a < x < \infty \end{cases} \\
z_1(y) = \begin{cases} z(y), & b < y < c \\ z_0(y), & 0 < y < b, c < y < \infty \end{cases}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $z(y)$ — нормальные и касательные напряжения на границе контакта, подлежащие определению. E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно,

$$R_{1,4}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^x \left[z \cos \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \mp \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \right] \frac{z dz}{z}$$

$$R_2(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi z}{2} \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \frac{(1+z^2) dz}{\Delta}$$

$$R_3(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} + z^2}{\Delta} + \operatorname{ch}^{-1} \frac{\pi z}{2} \right] \exp \left(-\frac{\pi z}{2} \right) \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) dz$$

$$R_{3,1}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[z \cos \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \pm \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \right] \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} \frac{dz}{\Delta}$$

$$R_4(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} z \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2} \sin \left(z \ln \frac{x}{t} \right) \frac{dz}{\Delta}, \quad \Delta = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{2} - z^2$$

$$K_1(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left[i^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} \right] \cos \nu x \cos t \frac{dh}{\Delta_1}$$

$$K_2(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left[i^2 h^2 - i h - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} - \frac{\nu-3}{2(\nu+1)} \exp(-2ih) + \right. \\ \left. + 0,5 \right] \cos \nu x \sin i t \frac{dh}{\Delta_1}, \quad K_3(t, x) = K_2(x, t)$$

$$K_4(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left[i^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} \right] \sin \nu x \sin i t \frac{dh}{\Delta_1}$$

$$\Delta_1 = \operatorname{sh}^2 i h - \frac{2}{\nu+1} \operatorname{ch} 2i h - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} - i^2 h^2$$

Указанная граничная задача (1) после удовлетворения условиям контакта

$$u_x(x, 0+) = u_x(x, 0-), \quad v_x(x, 0+) = v_x(x, 0-), \quad (0 < x < a), \\ u_y(0, y) = 0, \quad (b < y < c) \quad (3)$$

сводится к решению системы трех сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $p(t)$, $q(t)$, $\varphi(t)$.

$$\frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{p(t)}{x-t} dt + \int_0^a M_{1,1}(t, x) p(t) dt + \int_0^a M_{1,2}(t, x) q(t) dt + \\ + \int_0^b K_0(t, x) \varphi(t) dt = F_1(x), \quad (0 < x < a)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{q(t) dt}{x-t} + \int_0^a M_{2,1}(t, x) p(t) dt - \int_0^a M_{2,2}(t, x) z(t) dt - \\
& - \int_0^x K_2(t, x) z(t) dt = F_2(x), \quad (0 < x < a) \\
& \frac{2}{\pi} \int_x^c \frac{z(t) dt}{x-t} - \int_0^a R_0(t, x) p(t) dt + \int_0^a K_1(t, x) q(t) dt - \\
& + \int_0^x \left[K_3(t, x) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x-t} \right] z(t) dt, \quad (b < x < c)
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь ядра $M_{ij}(t, x)$ ($i, j = 1, 2$) и правые части $F_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
M_{1,1}(t, x) &= R_2(t, x) + K_2(t, x); \quad M_{1,2}(t, x) = -[R_4(t, x) - K_4(t, x)] \\
M_{2,1}(t, x) &= K_1(t, x) - K_3(t, x); \quad M_{2,2}(t, x) = \left[-\frac{4}{\pi} \frac{1}{x+t} + R_2(t, x) - K_1(t, x) \right] \\
F_1(x) &= -\frac{4}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{p_0(t) dt}{x-t} - \int_0^{\infty} [R_3(t, x) + K_4(t, x)] p_0(t) dt + \\
& + \int_0^a [R_4(t, x) - K_4(t, x)] q_0(t) dt - \int_0^b R_1(t, x) z_0(t) dt + \int_c^{\infty} R_0(t, x) z_0(t) dt \\
F_2(x) &= -\frac{4}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{q_0(t) dt}{x-t} + \frac{4}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{z_0(t) dt}{x-t} - \int_0^{\infty} [R_1(t, x) - K_1(t, x)] p_0(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} [R_2(t, x) - K_2(t, x)] q_0(t) dt - \int_0^b R_0(t, x) z_0(t) dt + \int_c^{\infty} R_2(t, x) z_0(t) dt \\
F_3(x) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{z_0(t) dt}{y-t} + \frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{z_0(t) dt}{y+t} - \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{z_0(t) dt}{y-t} + \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{z_0(t) dt}{y+t} + \\
& + \int_0^{\infty} R_0(t, x) p_0(t) dt - \int_0^{\infty} R_3(t, x) p_0(t) dt - \int_0^b R_2(t, x) z_0(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} R_3(t, x) z_0(t) dt
\end{aligned}$$

После замены переменных $x = \frac{a}{2}(z+1)$, $t = \frac{a}{2}(y+1)$ при $0 < t$,

$x < a$ и $x = \frac{c-b}{2}z + \frac{b+c}{2}$, $t = \frac{c-b}{2}y + \frac{b+c}{2}$ при $b < t$, $x < c$

уравнения (4) преобразуются к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_l(y) dy}{z-y} - \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 N_{lj}(y, z) \Phi_j(y) dy = \tau_l(z) \quad (5)$$

$$-1 < z < 1; l = 1, 2, 3$$

Здесь $\Phi_1(y) = p\left(\frac{a}{2}(y+1)\right)$, $\Phi_2(y) = q\left(\frac{a}{2}(y+1)\right)$, $\Phi_3(y) = z\left(\frac{c-b}{2}y + \frac{b+c}{2}\right)$ и остальные функции $\tau_l(z)$, $N_{lj}(y, z)$ ($l, j = 1, 2, 3$) определяются аналогичным образом. Отметим, что функция $\Phi_2(y)$ имеет особенность только в точке $y=1$, то есть $\Phi_2(y) = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$

$\varphi(y)$; $\varepsilon(y)$ — регулярная функция ($i = 1, 2$), а $\psi_i(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \chi_i(y)$, $\chi_i(y)$ — регулярные функции.

Дополнительное условие, которым должны удовлетворять решения уравнений (4) или (5), следует из рассмотрения равновесия квадранта и имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \Phi_l(y) dy = C \quad (l = 1, 2, 3) \quad (6)$$

Решение системы (5) при условии (6) в указанных классах существует и единственно [2].

Используя квадратурные формулы Гаусса [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \frac{\varepsilon(y)}{(y-\xi_k)} dy = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon(1-y_i)}{2n+1} \frac{\varphi(y_i)}{y_i-\xi_k}$$

где

$$y_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right), \quad i = 1, \dots, n; \quad \xi_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi_i(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x_k)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{\chi_i(t_i)}{(t_i-x_k)}$$

где

$$t_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i = 1, \dots, n; \quad x_k = \cos\frac{\pi k}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1;$$

$h/h=1$ $K \backslash a/b$	$c/b=2$		
	1	2	3
$K_1(a) =$	0.9339	0.1058	-0.0355
$K_2(a) =$	0.2628	0.0740	0.0369
$K_3(a) =$	-0.2945	0.1142	-0.0609
$K_1(b) =$	1.0137	0.9895	0.9754
$K_1(c) =$	0.2265	0.2349	0.2117

$h/h=5$ $K \backslash a/b$	$c/h=2$		
	1	2	3
$K_1(a) =$	0.9397	0.1108	-0.0323
$K_2(a) =$	0.2458	0.0552	0.0215
$K_3(a) =$	-0.2866	-0.1184	-0.0629
$K_1(b) =$	1.0141	0.9920	0.9798
$K_1(c) =$	0.2265	0.2319	0.2401

Таблица 1

$c/b = 2.5$			$c/b = 3$		
1	2	3	1	2	3
0.600	0.1532	-0.0198	0.3168	0.1788	0.0027
0.2761	0.0788	0.0397	0.2845	0.0824	0.0416
-0.2874	0.1176	0.0635	0.2787	-0.1190	-0.0656
0.7861	0.7659	0.7529	0.6583	0.6412	0.1291
0.1328	0.1373	0.1419	0.0913	0.0939	0.0971

Таблица 2

$c/b = 2.5$			$c/b = 3$		
1	2	3	1	2	3
0.6658	0.1552	-0.0166	0.3526	0.1836	0.0002
0.2594	0.0594	0.0238	0.2691	0.0628	0.0255
-0.2793	0.1220	-0.0656	0.2709	-0.1258	-0.0674
0.7864	0.7681	0.7568	0.6586	0.6430	0.6327
0.1328	0.1368	0.1408	0.0912	0.0936	0.0963

решение системы (5) сводится к решению системы $3n$ линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $\varphi_i(y_k)$, $\chi_i(t_k)$, $i = 1, 2$; $k = 1, n$.

После интерполирования по узлам y_i , t_i , $i = 1, \dots, n$, для иско-
мых функций получим

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^n \varphi(y_k) \frac{P_n(y)}{(y - y_k)P_n'(y_k)}$$

$$P_n(y) = \frac{\sin((n+1)\arccos y) - \sin(n\arccos y)}{\sin(\arccos y)}$$

$$\chi_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \chi_i(t_k) \frac{T_n(t) \sqrt{1-t_k^2}}{t-t_k}, \quad i = 1, 2$$

($T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — многочлены Чебышева).

Коэффициенты интенсивности напряжений определяются при помощи найденной функции $\chi_i(t)$ и $\varphi(y)$ ($i = 1, 2$) и вычисляются по формулам

$$\frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(0) = \sqrt{2} \chi_1(-1), \quad \frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(a) = \sqrt{2} \chi_1(1), \quad \frac{1}{\tau_0} \cdot K_2(a) = \sqrt{2} \varphi(i)$$

$$\frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(b) = \chi_2(-1) / \sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sigma_0} K_1(c) = \chi_2(1) / \sqrt{2}$$

Их численные значения приведены в табл. 1 и 2.

STRESS STATE OF A SEMI-PLANE, WEAKENED WITH FINITE AND SEMI-INFINITE CRACKS

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

ՎԵՐՁՈՎՈՐ ԵՎ ԿՐՈՒԱՆՎԵՐՋ ՃԱՔԵՐՈՎ ԹՈՒՆԱՑՎԱԾ ԿՐՈՆԱՐԹՈՒԹՅԱՆ
ՍՏՐԵՍՍԻՆՏԻՆ ՎԵՐՃԱԿԸ

Բ. Ա. ԱՓՅԱՆ, Ս. Պ. ՍՏԵՓԱՆԻԱՆ

ՈՒՎՈՒՄՈՒՄ

Գիտարկված է վերջավոր և կիսանսովորջ ճաքերով թուլացված առանցք-
կան կիսաշարթուրքյան լարվածացին դեֆորմացված փիճակի առանցքային-
թյան տեսության հարթ խնդիրը: Նշված խնդրի լուծման էությունը կայանում
է նրանում, որ առանցքային մարմնի զբաղեցրած տիրույթի բաժանվում է եր-
կու կանոնական տիրույթների՝ բառարդ հարթության և շերտի: Էներված են
լարումների ինտենսիվության գործակիցների թվային արժեքները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Афан Б. А., Степаня С. П. Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещинами. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1989, т. 42, № 2, с. 50--57.
2. Мухомеловичи И. П. Сингулярные интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962. 511 с.
3. Erdogan F. E., Gupta G. On the numerical solutions of singular integral equations. — Quart. appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
6.11.1989