ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № [illegible], 1989 Механика

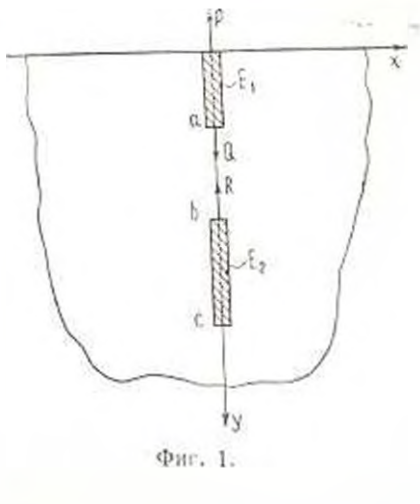
УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ (НАКЛАДКАМИ)

АГАБЕКЯН П. В., ГРИГОРЯН Э. Х.

В работе рассматривается задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя конечными стрингерами, один из которых выходит на границу пластины. Причем стрингеры перпендикулярны к границе пластины и находятся на одной линии. Задача с помощью метода факторизации и метода ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению квазивполне регулярной совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений.

Пусть полубесконечная пластина с двумя конечными стрингерами, один из которых выходит на границу, деформируется под действием сил, приложенных на концах стрингеров. Модули упругости стрингеров равны E_1 и E_2 (фиг. 1). Относительно стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка [1]. Тогда уравнения равновесия стрингеров, в силу вышесказанного, запишутся в виде



Фиг. 1.

$$\frac{dv^{(1)}}{dy}=\frac{1}{E_1F}\int_y^a \tau(\eta)d\eta+\frac{Q}{E_1F} \quad 0<y<a \tag{1}$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dy}=\frac{1}{E_2F}\int_y^c \tau(\eta)d\eta,\quad b<y<c$$

при условиях

$$\int_0^a \tau(s)ds=P-Q,\qquad \int_b^c \tau(s)ds=R \tag{1'}$$

Здесь $\tau(y)$ — интенсивность контактных тангенциальных сил, $v^{(1)}(y)$ — перемещения точек стрингеров, F — площадь поперечного сечения стрингеров, P, Q, R — интенсивности сосредоточенных сил, действующих на концах стрингеров.

С другой стороны, для вертикальных деформаций полубесконечной пластины имеем

$$\frac{dv^{(2)}}{dy}=\frac{1}{\pi H}\int_0^a\left[\frac{d_1}{\eta+y}-\frac{d_2}{\eta-y}-\frac{d_3(\eta^2-\eta y)}{(\eta+y)^3}\right]\tau(\eta)d\eta+ \tag{2}$$

$$+\frac{1}{\pi H}\int_b^c\left[\frac{d_1}{\eta+y}-\frac{d_2}{\eta-y}-\frac{d_3(\eta^2-\eta y)}{(\eta+y)^3}\right]\tau(\eta)d\eta,\quad 0<y<\infty$$

где H — толщина пластины

$$d_1=\frac{\mu^2+(\lambda^*+2\mu)^2}{4\mu(\lambda^*+\mu)(\lambda^*+2\mu)},\quad d_2=\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+\mu)},\quad d_3=\frac{\lambda^*+\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)},\quad \lambda^*=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}$$

Имея в виду (1), (2) и удовлетворяя условиям контакта

$$v^{(1)}(y)=v^{(2)}(y)\quad \text{при}\quad 0<y<a\quad \text{и}\quad b<y<c$$

после некоторых преобразований получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с неподвижной особенностью:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[\frac{B}{\eta+y}-\frac{1}{\eta-y}-\frac{A(\eta^2-\eta y)}{(\eta+y)^3}\right]\varphi(\eta)d\eta=\lambda_1\int_y^1\varphi(\eta)d\eta+ \tag{3}$$

$$-\lambda_1\frac{Q}{a}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 K_{12}(y,\eta)\psi(\eta)d\eta,\quad (0<y<1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{1}{\eta-y}\psi(\eta)d\eta=-\lambda_2\int_y^1\psi(\eta)d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 K_{21}(y,\eta)\varphi(\eta)d\eta+ \tag{4}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 K_{22}(y,\eta)\psi(\eta)d\eta,\quad (-1<y<1)$$

Здесь

$$\varphi(y)=\tau(ay),\quad \psi(y)=\tau\left(\frac{c-b}{2}y+\frac{c+b}{2}\right)$$

$$K_{11}(y,\eta)=\frac{1}{\gamma_0+\eta-\gamma_1 y}-\frac{B}{\gamma_0+\eta+\gamma_1 y}+\frac{A(\gamma_0+\eta)(\gamma_0+\eta-\gamma_1 y)}{(\gamma_0+\eta+\gamma_1 y)^3}$$

$$K_{21}(y,\eta)=\frac{B}{2\gamma_0+\eta+y}-\frac{A(\gamma_0+\eta)(\eta-y)}{(2\gamma_0+\eta+y)^3}$$

$$K_{22}(y,\eta)=\frac{B}{\eta+\gamma_1^{-1}y+\gamma_2}-\frac{1}{\eta-\gamma_1^{-1}y-\gamma_2}-\frac{A(\eta-\gamma_1^{-1}y-\gamma_2)\eta}{(\eta+\gamma_1^{-1}y+\gamma_2)^3}$$

$$\gamma_0=\frac{c+b}{c-b},\quad \gamma_1=\frac{2a}{c-b},\quad \gamma_2=\frac{b+c}{2a}$$

$$A=d_2^{-1}d_3,\quad B=d_2^{-1}d_1,\quad \lambda_1=\frac{d_2^{-1}aH}{E_2F},\quad \lambda_2=\frac{d_2^{-1}(c-b)H}{2E_2F}$$

Сначала рассмотрим уравнение (3), продолжая его в область $1<y<\infty$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{B}{\eta+y}-\frac{1}{\eta-y}-\frac{A(\eta^2-\eta y)}{(\eta+y)^3}\right]\varphi^-(\eta)d\eta=$$

$$=\lambda_1\left(\int_0^\infty\theta(\eta-y)\,\varphi^-(\eta)d\eta+\frac{Q}{a}\right)\theta(1-y)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{11}^-(y,\eta)\,\psi(\eta)d\eta+g^+(y)$$

$$(0<y<\infty)\tag{5}$$

где $\theta(y)$ — функция Хевисайла, $K_{11}^-(y,\eta)=\theta(1-y)K_{11}(y,\eta)$,

$$g^+(y)=\theta(y-1)d\varphi^{(1)}/dy,\quad \varphi^-(y)=\theta(1-y)\varphi(y).$$

После замены в (5) $\eta=e^u$, $y=e^x$ и применения преобразования Фурье получим

$$\overline{K}(\alpha)\overline{\varphi}_1^-(\alpha)+\frac{\lambda_1}{\alpha}\overline{\varphi}_1^-(\alpha-i)+\overline{f}^-(\alpha)=-\lambda_1\frac{Q}{a\alpha}+\overline{g}_1^+(\alpha)\tag{6}$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<-\nu),\quad (0<\nu<1)$$

где

$$\overline{K}(\alpha)=\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha-A(\alpha+i)^2-B}{\operatorname{sh}\pi\alpha},\quad \alpha_1=-i\nu,\quad K(\alpha_1)=0$$

$$\overline{f}^-(\alpha)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\overline{K_{11}^-}(\alpha,\eta)\,\psi(\eta)d\eta\tag{7}$$

$$\overline{K_{11}^-}(\alpha,\eta)=\int_0^1K_{11}(y,\eta)y^{i\alpha-1}\,dy=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\partial^m K_{11}(y,\eta)}{\partial y^m}\bigg|_{y=1}\frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\alpha+m+1)}$$

$$-(-1)^n \frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\alpha+n+1)} \int\limits_0^1 \frac{\partial^{n+1} K_{11}(y,\tau)}{\partial y^{n+1}} y^{i\alpha+n}\, dy, \quad (\mathrm{Jm}\,\alpha < 0) \tag{7}$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\overline{\varphi}_1^-(\alpha)$ и $\overline{g}_1^+(\alpha)$ являются трансформантами Фурье функций $\varphi_1^-(u)=\varphi^-(e^u)$, $g_1^+(u)=-ig^+(e^u)$ соответственно.

Решение функционального уравнения построим следующим образом: для этого $\overline{K}(\alpha)$ представим в виде

$$\overline{K}(\alpha)=\frac{\alpha}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)}\,G(\alpha)$$

где

$$\frac{\mathrm{ch}\,\pi\alpha-1}{\mathrm{sh}\,\pi\alpha}=\frac{\alpha}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad G(\alpha)=\frac{\mathrm{ch}\,\pi\alpha-A(\alpha+i)^2-B}{\mathrm{ch}\,\pi\alpha-1}$$

далее факторизуем $\overline{K}(\alpha)$, записав в виде

$$\overline{K}(\alpha)=\overline{K}^+(\alpha)\,\overline{K}^-(\alpha), \quad -1<\mathrm{Jm}\,\alpha<-\nu$$

где

$$\overline{K}^+(\alpha)=\overline{M}^+(\alpha)[\overline{L}^+(\alpha)]^{-1}, \quad \overline{K}^-(\alpha)=\overline{M}^-(\alpha)\,\overline{L}^-(\alpha)$$

$$\overline{M}^+(\alpha)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \overline{M}^-(\alpha)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{L}^-(\alpha)=\exp[\overline{R}^-(\alpha)], \quad \overline{L}^+(\alpha)=\exp[-\overline{R}^+(\alpha)] \tag{8}$$

$$R(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{R}(\alpha)\exp(-i\alpha u)\,d\alpha \quad (-1<\tau<-\nu)$$

$$\overline{R}(\alpha)=\overline{R}^+(\alpha)+\overline{R}^-(\alpha)=\ln G(\alpha)$$

$$\overline{R}^+(\alpha)=\int\limits_0^\infty R(u)\exp(i\alpha u)\,du, \quad \overline{R}^-(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^0 R(u)\exp(i\alpha u)\,du$$

$\overline{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\mathrm{Jm}\,\alpha>-1$, $\overline{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\mathrm{Jm}\,\alpha<-\nu$. Причем при $|\alpha|\to\infty$ $\overline{K}^+(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$, $\overline{K}^-(\alpha)\sim\alpha^{\frac{1}{2}}$ в своих областях регулярности.

Далее, поступая аналогично тому, что делается при решении функциональных уравнений аналогичного типа [2], его можно записать в виде

$$\overline{L}_1^{-}(\alpha)=\overline{\varphi}_1^{-}(\alpha)\overline{K}^{-}(\alpha)+i_1\overline{\Phi}^{-}(\alpha)+\overline{F}^{-}(\alpha)+\frac{i_1P}{a}\frac{[\overline{K}^{+}(0)]^{-1}}{\alpha}+$$

$$+\frac{f_0[\overline{K}^{+}(0)]^{-1}}{\alpha}=\overline{g}_1^{+}(\alpha)[\overline{K}^{+}(\alpha)]^{-1}-\frac{i_1Q}{a}\frac{[(\overline{K}^{+}(\alpha))^{-1}-(\overline{K}^{+}(0))^{-1}]}{\alpha}-$$

$$-i_1\overline{\Phi}^{+}(\alpha)-\overline{F}^{+}(\alpha)=\overline{L}_2^{+}(\alpha),\ (-1<\operatorname{Im}\alpha<-\nu) \tag{9}$$

где

$$\overline{\Phi}(\alpha)=\overline{\Phi}^{+}(\alpha)+\overline{\Phi}^{-}(\alpha),\quad \overline{F}(\alpha)=\overline{F}^{+}(\alpha)+\overline{F}^{-}(\alpha)$$

$$\overline{\Phi}(\alpha)=\frac{[\overline{K}^{+}(\alpha)]^{-1}\overline{\varphi}_1^{-}(\alpha-i)-[\overline{K}^{+}(0)]^{-1}\overline{\varphi}_1^{-}(-i)}{\alpha},\quad \overline{\varphi}_1(-i)=\frac{P-Q}{a}$$

$$\overline{F}(\alpha)=\frac{\alpha[\overline{K}^{+}(\alpha)]^{-1}\overline{f}(\alpha)-[\overline{K}^{+}(0)]^{-1}f_0}{\alpha},\quad f_0=\operatorname*{Res}_{\alpha=0}[\overline{f}^{-}(\alpha)]$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{\Phi}(\alpha)\exp(-i\alpha u)d\alpha,\quad F(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{F}(\alpha)\exp(-i\alpha u)d\alpha$$

$$\overline{\Phi}^{+}(\alpha)=\int_0^{\infty}\Phi(u)\exp(i\alpha u)du,\quad \overline{F}^{+}(\alpha)=\int_0^{\infty}F(u)\exp(i\alpha u)du$$

$$\overline{\Phi}^{-}(\alpha)=\int_{-\infty}^{0}\Phi(u)\exp(i\alpha u)du,\quad \overline{F}^{-}(\alpha)=\int_{-\infty}^{0}F(u)\exp(i\alpha u)du$$

Заметим, что при $|\alpha|\to\infty$ $\overline{\varphi}_1^{-}(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$, $\overline{g}_1^{+}(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$ в своих областях регулярности, поскольку функции $\varphi_1^{-}(v)$, $g_1^{+}(v)$ при $v\to\pm0$ имеют корневую особенность. Тогда очевидно, что $\overline{\Phi}(\alpha)\sim|\alpha|^{-1}$ при $|\sigma|\to\infty$, $\alpha=\sigma+i\tau$, и следовательно, $\Phi(u)\sim\ln|u|$ при $u\to0$. Из этого непосредственно следует, что функции $\overline{\Phi}^{\pm}(\alpha)$ при $|\alpha|\to\infty$ имеют порядок $\frac{\ln\alpha}{\alpha}$ в своих областях регулярности. Далее, так как $\overline{F}(\sigma)\sim\sigma_{+}^{-\frac{1}{2}}-$ $-i\sigma_{-}^{-\frac{1}{2}}$ $(\sigma_{\pm}^{\lambda}=\theta(\pm\sigma)\sigma^{\lambda})$ при $|\sigma|\to\infty$, то $F(u)\sim u_{\pm}^{-\frac{1}{2}}$ при $u\to\pm0$. Это говорит о том, что $\overline{F}^{+}(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$, а $\overline{F}^{-}(\alpha)\sim\alpha^{-1}$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Из вышесказанного следует, что функции $\overline{L}_1^{-}(\alpha)$ и $\overline{L}_2^{+}(\alpha)$ принимают конечные значения в полосе $-1<\operatorname{Im}\alpha<-\nu$ при $|\alpha|\to\infty$.

Теперь, применив к (9) обратное преобразование Фурье, получим

$L_1^{-}(v)=L_2^{+}(v)$, $L_1^{-}(v)=0$ при $v>0$, $L_2^{+}(v)=0$ при $v<0$. Но это равенство может иметь место лишь только тогда, когда $L_1^-(v)$ и $L_2^+(v)$ будут функциями, сосредоточенными в нуле. Следовательно [3],

$$L_1^-(v)=L_2^+(v)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\delta^{(k)}(v),\quad \delta^{(k)}(v)=\frac{d^k}{dv^k}\delta(v)$$

Применив к $L_1^-(v)$, $L_2^+(v)$ преобразование Фурье, будем иметь

$$\overline{L}_1^-(\alpha)=\overline{L}_2^+(\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k(-i\alpha)^k,\quad -1<\mathrm{Im}\,\alpha<-\nu$$

Отсюда, имея в виду, что $\overline{L}_1^-(\alpha)\sim 0(1)$, $\overline{L}_2^+(\alpha)\sim 0(1)$ при $|\alpha|\to\infty$ в полосе $-1<\mathrm{Jm}\,\alpha<-\nu$, получим $\overline{L}_1^-(\alpha)=\overline{L}_2^+(\alpha)=a_0$. Тогда из (9) получим

$$\overline{\varphi}_1^-(\alpha)=\frac{a_0}{\overline{K}^-(\alpha)}-\lambda_1\frac{\overline{\Phi}^-(\alpha)}{\overline{K}^-(\alpha)}-\frac{\overline{F}^-(\alpha)}{\overline{K}^-(\alpha)}-\frac{\lambda_1 Pa^{-1}+f_0}{\overline{K}^+(0)\overline{K}^-(\alpha)\alpha}\tag{10}$$

$$\overline{g}_1^+(\alpha)=a_0\overline{K}^+(\alpha)+\lambda_1\frac{Q}{a}\cdot\frac{\overline{K}^+(\alpha)-\overline{K}^+(0)}{\overline{K}^+(0)\alpha}+\lambda_1\overline{K}^+(\alpha)\overline{\Phi}^+(\alpha)+\overline{K}^+(\alpha)\overline{F}^+(\alpha)$$

Если в (10) положить $\overline{F}^-(\alpha)=0$, $f_0=0$, получим выражение $\overline{\varphi}_1^-(\alpha)$ той задачи, в которой рассматривается полубесконечная пластина с выходящим на границу стрингером (задача Рейснера) [1,4].

Далее, не останавливаясь на подробностях, отметим, что после вычисления интегралов (8), функции $\overline{K}^+(\alpha)$, $\overline{K}^-(\alpha)$ будут даваться в виде бесконечных произведений

$$\overline{K}^+(\alpha)=\exp(-\overline{R}^+(0))\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2i}\right)^2}{\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\alpha_1+2i}\right)}\prod_{k=2}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{2ki}\right)^2}{\left(1+\frac{\alpha}{\alpha_k+2i}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\overline{\alpha}_k-2i}\right)}$$

$$\overline{K}^-(\alpha)=-\frac{1}{2}\exp(\overline{R}^-(-i))\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha+i}{\alpha_1+i}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)\alpha\left(1-\frac{\alpha+i}{3i}\right)^2}\times$$

$$\times\prod_{k=2}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha+i}{\alpha_k+i}\right)\left(1+\frac{\alpha+i}{\overline{\alpha}_k-i}\right)}{\left(1-\frac{\alpha+i}{(2k+1)i}\right)^2}\tag{11}$$

где α_k, $-\overline{\alpha}_k$ являются нулями функции $K(\alpha)$, расположенными в порядке $0<\mathrm{Jm}\,\alpha_k<\mathrm{Jm}\,\alpha_{k+1}$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_k>0$ $(k=2, 3, \ldots)$, а $\overline{\alpha}_k$ — число, сопряженное к α_k. Причем,

$$\alpha_k=(2k-3)i+\frac{2}{\pi}\ln|\sqrt{2A}(2k-3)|\ \text{при}\ k\to\infty$$

Отметим, что при получении (10) имелось в виду представление [5]

$$\frac{G(\alpha)}{G(-i)}=-\frac{4}{\pi^2\alpha^2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-\frac{(\alpha+i)^2}{(\alpha_k+i)^2}\right]\left[1-\frac{(\alpha+i)^2}{(\bar{\alpha}_k-i)^2}\right]}{\left(1+\frac{\alpha^2}{4k^2}\right)^2}$$

Функции $\bar{\varphi}^-(\alpha)$, $\bar{F}^-(\alpha)$, $\Phi^-(\alpha)$ регулярны при $\operatorname{Im}\alpha<-\nu$, аналитическое продолжение функции $\bar{F}^-(\alpha)$, как следует из (7), имеет простые полюса в точках $\alpha=in$ $(n=1,2,\ldots)$, а функции $\bar{\varphi}_1^-(\alpha)$ — в точках $\alpha_1=-i\nu$, $\alpha=\alpha_1+in$, $\alpha=\alpha_k+in$, $\alpha=-\bar{\alpha}_k+in$ $(n=0,1,2,\ldots,$ $k=2,3,\ldots)$, в котором нетрудно убедиться, обсуждая функциональное уравнение (6). Функция $\bar{\Phi}^-(\alpha)$ имеет полюса в тех точках, что и $\bar{\varphi}_1^-(\alpha)$ кроме точек $\alpha=\alpha_1$, $\alpha=\alpha_k$, $\alpha=-\bar{\alpha}_k$.

Из вышесказанного следует, что функции $\tau(ay)$, $\bar{F}^-(\alpha)$ и $\bar{\Phi}^-(\alpha)$ имеют следующие представления:

$$\tau(ay)=i\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n b_{nm}y^{n-i\alpha_m}\right)m^{-\varepsilon}X_m+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n\bar{b}_{nm}y^{n+i\bar{\alpha}_k}\right)m^{-\varepsilon}Y_m\right] \tag{12}$$

$$\bar{\Phi}^-(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(\bar{K}^+(\alpha_m+in+i))^{-1}b_{nm}}{(\alpha-\alpha_m-in-i)(\alpha_m+in+i)}\right)m^{-\varepsilon}X_m+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_m+in+i))^{-1}\bar{b}_{nm}}{(\alpha+\bar{\alpha}_m-in-i)(-\bar{\alpha}_m+in+i)}\right)m^{-\varepsilon}Y_m\right] \tag{13}$$

$$\bar{F}^-(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha m}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\varphi(\eta)d\eta \tag{14}$$

где

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}<1,\quad I_{\alpha m}=\frac{1-(-1)^m[B-A(m+1)^2]}{-\bar{K}^+(im)(\alpha-im)}$$

$$m^{-\varepsilon}X_m=\operatorname*{Res}_{\alpha\to\alpha_m}\bar{\varphi}_1^-(\alpha),\quad m^{-\varepsilon}Y_m=\operatorname*{Res}_{\alpha\to-\bar{\alpha}_m}\bar{\varphi}_1^-(\alpha),\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$$

$$(-\lambda_1)^n b_{nm}m^{-\varepsilon}X_m=\operatorname*{Res}_{\alpha\to\alpha_m+in}\bar{\varphi}_1^-(\alpha),\quad(-\lambda_1)^n\bar{b}_{nm}m^{-\varepsilon}Y_m=\operatorname*{Res}_{\alpha\to-\bar{\alpha}_m+in}\bar{\varphi}_1^-(\alpha)$$

$$b_{nm}=\prod_{p=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_m+ip)K(\alpha_m+ip)},\quad \bar{b}_{nm}=\prod_{p=1}^{n}\frac{1}{(-\bar{\alpha}_m+ip)K(-\bar{\alpha}_m+ip)}$$

$$b_{0m}=\bar{b}_{0m}=1$$

Выше имелось в виду, что

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=i m}\overline{K}_{11}(\alpha,\eta)=-\frac{i}{m!}\left.\frac{\partial^{m}K_{11}(y,\eta)}{\partial y^{m}}\right|_{y=0}$$

Кроме того, полагалось, что все α_k комплексны. В случае мнимого α_k надо в выражениях (12), (13), (14) поставить $Y_k=0$.

Теперь, имея в виду (13), (14), из (10) легко получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$X_k+\frac{\nu_1 k\overline{K}^{+}(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(R_{km}^{(1)}X_m+R_{km}^{(2)}Y_m\right)+\frac{k\overline{F}^{-}(\alpha_k)\overline{K}^{+}(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)}=$$

$$=\frac{a_0 k\overline{K}^{+}(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)}-\frac{(\nu_1 Pa^{-1}+f_0)\overline{K}^{+}(\alpha_k)k}{\overline{K}^{-}(0)K'(\alpha_k)\alpha_k}$$

$$Y_k+\frac{\nu_1 k\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_k)}{K'(-\overline{\alpha}_k)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\overline{R}_{km}^{(1)}X_m+\overline{R}_{km}^{(2)}Y_m\right)+\frac{k\overline{F}^{-}(-\overline{\alpha}_k)\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_k)}{K'(-\overline{\alpha}_k)}=$$

$$=\frac{a_0 k\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_k)}{K'(-\overline{\alpha}_k)}+\frac{(\nu_1 Pa^{-1}+f_0)\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_k)k}{\overline{K}^{-}(0)K'(-\overline{\alpha}_k)\overline{\alpha}_k}$$

где

$$R_{km}^{(1)}=m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\nu_1)^n(\overline{K}^{+}(\alpha_m+in+i))^{-1}b_{nm}}{(\alpha_k-\alpha_m-in-i)(\alpha_m+in+i)}$$

$$R_{km}^{(2)}=m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)^n(\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_m+in+i))^{-1}b_{nm}}{(\alpha_k+\overline{\alpha}_m-in-i)(-\overline{\alpha}_m+in+i)}$$

$$\overline{R}_{km}^{(1)}=-m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\nu_1)^n(\overline{K}^{+}(\alpha_m+in+i))^{-1}b_{nm}}{(\overline{\alpha}_k+\alpha_m+in+i)(\alpha_m+in+i)}$$

$$\overline{R}_{km}^{(2)}=-m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\nu_1)^n(\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_m+in+i))^{-1}b_{nm}}{(\overline{\alpha}_k-\overline{\alpha}_m+in+i)(-\overline{\alpha}_m+in+i)}$$

Далее функцию $\varphi(y)$ ищем в виде [6, 7]

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\sum_{n=0}^{\infty}A_n T_n(y)$$

где $T_n(y)=\cos(n\arccos y)$ — многочлены Чебышева первого рода. Подставив эту функцию в выражения $\overline{F}^{-}(\alpha_k)$, $\overline{F}^{-}(-\overline{\alpha}_k)$ и в (4), в итоге получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nU_{n-1}(y)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\int_{y}^{1}\frac{T_n(\eta)\nu_2}{\sqrt{1-\eta^2}}d\eta-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{21}(y,\eta)\frac{T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}d\eta\right\}-$$

(15)

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n b_{nm}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}K_{22}(y,\eta)\eta^{n-i\alpha_m}d\eta\right)m^{-1}X_m+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n\bar{b}_{nm}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}K_{21}(y,\eta)\eta^{n+i\bar{\alpha}_m}d\eta\right)m^{-1}Y_m\right]=$$

$$=A_0\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{21}(y,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}-\lambda_2\arccos y\right),\quad(-1<y<1)$$

$$X_k+\lambda_1\frac{\bar{K}^+(\alpha_k)k^{\cdot}}{K'(\alpha_k)}\sum_{m=1}^{\infty}(R_{km}^{(1)}X_m+R_{km}^{(2)}Y_m)+$$

$$+\frac{\bar{K}^+(\alpha_k)k^{\cdot}}{K'(\alpha_k)}\sum_{n=1}^{\infty}L_{kn}A_n=\frac{a_0k^{\cdot}\bar{K}^+(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)}-\tag{16}$$

$$-\frac{(\lambda_1Pa^{-1}+f_0)\bar{K}^+(\alpha_k)k^{\cdot}}{\bar{K}^+(0)K'(\alpha_k)\alpha_k}-\frac{k^{\cdot}L_{k0}A_0\bar{K}^+(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)}$$

$$Y_k+\lambda_1\frac{\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)k^{\cdot}}{K'(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{m=1}^{\infty}(\bar{R}_{km}^{(1)}X_m+\bar{R}_{km}^{(2)}Y_m)+$$

$$+\frac{\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)k^{\cdot}}{K'(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{m=1}^{\infty}L_{kn}A_n=\frac{a_0k^{\cdot}\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)}{K'(-\bar{\alpha}_k)}+\tag{17}$$

$$+\frac{(\lambda_1Pa^{-1}+f_0)\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)k^{\cdot}}{\bar{K}^+(0)K'(-\bar{\alpha}_k)\bar{\alpha}_k}-\frac{k^{\cdot}L_{k0}\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_k)A_0}{K'(-\bar{\alpha}_k)}$$

где $U_{n-1}(x)=\sin(n\arccos x)/\sin(\arccos x)$ — многочлены Чебышева второго рода,

$$L_{k0}=\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha_k m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

$$L_{k1}=\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha_k m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}d\eta$$

$$L_{kn}=-\frac{1}{2n(n-1)}\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha_k m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{d\eta^2}\left[\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\right]\sqrt{1-\eta^2}U_{n-1}(\eta)d\eta-$$

$$-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha_k m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{d\eta^2}\left[\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\right]\sqrt{1-\eta^2}U_{n+1}(\eta)d\eta$$

а выражение $\bar{L}_{kn}$ получается из L_{kn}, если в них вместо $I_{\alpha_k m}$ положить $I_{-\bar{\alpha}_k m}$.

Отметим, что выше была использована формула [8]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{s-x}\frac{T_k(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds=U_{k-1}(x)\quad(-1<x<1)$$

Умножив обе части равенства (15) на $\sqrt{1-y^2}\,U_{k-1}(y)$, при этом имея в виду ортогональность функций $U_{k-1}(y)$ с весом $\sqrt{1-y^2}$, и интегрируя в пределах $-1<y<1$, окончательно получим искомую совокупность бесконечных систем линейных уравнений следующего вида.

$$A_k+\sum_{n=1}^{\infty}B_{kn}A_n+\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_{km}^{(1)}X_m+B_{km}^{(2)}Y_m\right)=A_0\gamma_k \tag{18}$$

$$X_k+c_1\frac{K^{+}(\alpha_k)k}{K'(\alpha_k)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(R_{km}^{(1)}X_m+R_{km}^{(2)}Y_m\right)+$$

$$+\frac{\bar{K}^{+}(\alpha_k)k}{K'(\alpha_k)}\sum_{n=1}^{\infty}L_{kn}A_n=\frac{a_0k\bar{K}^{+}(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)}-$$

$$-\frac{(c_1Pa^{-1}+f_0)\bar{K}^{+}(\alpha_k)i}{K^{+}(0)K'(\alpha_k)\alpha_k}-\frac{kL_{k0}A_0\bar{K}^{+}(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)} \tag{19}$$

$$Y_k+c_1\frac{k\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)}{K'(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\bar{R}_{km}^{(1)}X_m+\bar{R}_{km}^{(2)}Y_m\right)+$$

$$+\frac{\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)k}{K'(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{kn}A_n=\frac{a_0k\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)}{K'(-\bar{\alpha}_k)}+ \tag{20}$$

$$+\frac{(c_1Pa^{-1}-f_0)\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)i}{K^{+}(0)K'(-\bar{\alpha}_k)\bar{\alpha}_k}-\frac{k\bar{L}_{k0}A_0\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)}{K'(-\bar{\alpha}_k)}$$

где

$$\gamma_k=\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}K_{21}(y,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}-\pi c_2\arccos y\right]\sqrt{1-y^2}\,U_{k-1}(y)\,dy$$

$$B_{kn}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\int_{y}^{1}\frac{T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta\,c_2-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{K_{21}(y,\eta)T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\right]\sqrt{1-y^2}\,U_{k-1}(y)\,dy$$

$$B_{kn}^{(2)}=\frac{\bar{\gamma}_k}{\pi(1+i\bar{\alpha}_n)}-B_{kn0}^{(2)}+\sum_{m=1}^{\infty}B_{knm}^{(2)},\quad B_{kn}^{(1)}=\frac{\gamma_k}{\pi(1-i\alpha_n)}-B_{kn0}^{(1)}+\sum_{m=1}^{\infty}B_{knm}^{(1)}$$

$$B^{(1)}_{kn0} = \frac{1}{\pi n(1-\alpha_n)}\left[\frac{1}{k-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial^2 K_{22}(y,\eta)}{\partial y\partial\eta}\eta^{1-\alpha_n}d\eta\sqrt{1-y^2}\,U_{k-2}(y)dy -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k+1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial^2 K_{22}(y,\eta)}{\partial y\partial\eta}\eta^{1-\alpha_n}d\eta\sqrt{1-y^2}\,U_{k}(y)\,dy\right]$$

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{22}(1,y)\sqrt{1-y^2}\,U_{k-1}(y)dy$$

$$B^{(1)}_{knm} = \frac{(-1)^m b_{mn}}{\pi n}\left[\frac{1}{k-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial y}K_{22}(y,\eta)\eta^{m-\alpha_n}d\eta\sqrt{1-y^2}\,U_{k-2}(y)dy -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k+1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial y}K_{22}(y,\eta)\eta^{m-\alpha_n}d\eta\sqrt{1-y^2}\,U_{k}(y)dy\right]$$

а выражение для $B^{(2)}_{kn0}$ получится из $B^{(1)}_{kn0}$, если в нем вместо α_n положить $-\bar{\alpha}_n$, а для $B^{(2)}_{knm}$ — если в $B^{(1)}_{knm}$ вместо α_n положить $-\bar{\alpha}_n$, а вместо b_{mn} — $\bar{b}_{mn}$.

Заметим, что если в (16) и (17) положить $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}=0$, то полученная совокупность бесконечных систем будет соответствовать задаче, когда стрингер на участке (b, c) отсутствует [9].

В случае мнимого корня α_j надо положить в (18), (19) $Y_j=0$ и не рассматривать (20) при $k=j$.

Ввиду того, что имеют место оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|B^{(1)}_{kn0}\right| < \frac{c_1}{k},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|B^{(1)}_{knm}\right| < \frac{c_2}{k}\qquad \text{при } k\to\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|B_{kn}\right| < \frac{c_3}{\sqrt{k}},\quad \left|K^{+}(\alpha_k)\cdot K^{-}(\alpha_k)\right| < \frac{c_4}{|\alpha_k|^{1/2}}\qquad \text{при } k\to\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|L_{kn}\right| < \infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|P^{(1)}_{kn}\right| < \infty,\quad \varphi_k\to 0\quad \text{при } k\to\infty$$

для полученной совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений следует их квазивполне регулярность.

Постоянные a_0, A_0 и l_0 определяются из условий (1)' и из условия

$$l_0 = -\frac{1-B-A}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\chi(\eta)d\eta}{\ldots}$$

Для полного представления о законе изменения $\tau(ay)$ при

$0<y<1$ помимо формулы (9), необходимо знать и асимптотическое поведение этой функции при $y\to1$. Не вдаваясь в подробности, непосредственно приведем эту асимптотическую формулу

$$\tau(ay)=\frac{ia_0\sqrt{2}}{\sqrt{-\ln y}}+K_0\sqrt{-\ln y}+\frac{ia_0\sqrt{2}}{\Gamma(3/2)}\left(\frac{1}{6}+R_0+\frac{\lambda_1}{\pi}\right)\sqrt{-\ln y}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}\lambda_1\overline{\tau}_1(-i)}{\Gamma(3/2)\overline{K}^{+}(0)}\sqrt{-\ln y}+\frac{i\lambda_1 a_0\sqrt{2}}{\pi^2}\left[\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\ln(-\lambda_1\ln y)\right]\sqrt{-\ln y}+O(\ln y),\quad \text{при }\ y\to1$$

где

$$R_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\pi\sigma+A\sigma^2-B}{\operatorname{ch}\pi\sigma+1}\right)d\sigma,\qquad K_0=\frac{4}{\pi\sqrt{2\pi}\,\overline{K}^{+}(0)}\int_{-1}^{1}K_{11}(1,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$$

CONTACT PROBLEM FOR SEMI-INFINITE PLATES STRENGTHENED WITH TWO FINITE STRINGERS

P. V. AGABEKIAN, E. KH. GRIGORIAN

ԵՐԿՈՒ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Պ. Վ. ԱՂԱԲԵԿՅԱՆ, Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է երկու վերջավոր վերադիրներով ուժեղացված կիսաանվերջ սալի համար կոնտակտային խնդիր։ Վերադիրներից մեկը դուրս է գալիս սալի եզր և դեֆորմացվում է վերադիրի ծայրերում կիրառված ուժերի ազդեցության տակ։ Վերադիրները ուղղահայաց են սալի եզրին և գտնվում են մի գծի վրա։ Վերադիրների առաձգականության մոդուլները տարբեր են։

Ֆակտորիզացիայի և Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդների օգնությամբ խնդիրը բերված է հանրահաշվական հավասարումների քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ համակարգի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муки Р., Стернберг Э.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке.—Тр. Амер. общ. инж.-механиков, 1968, сер. Е, № 4.
2. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Функциональный анализ. Гл. редакция физ-мат. литературы, М., 1972, 467 с.
4. *Григорян Э. Х.* Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1982, № 2.

5. *Григорян Э. Х.* Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1981, № 3.
6. *Arutunyan N. Kh., Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold. Nowacki Anniversary Volume, Groningen, Wolters-Noordhoff publishing, 1971.
7. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.— Ереван, Изд. Госуниверситета, 1983.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1962.
9. *Григорян Э. Х.* Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.— Межвузовской сб. научн. тр., Механика, Ереван, вып. 6, 1987.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
21.IX.1988