

УДК 532.529:533.6.011.34

## СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ ПРИ КВАЗИИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

ОГАННИ Г. Г.

В работах [1—3] получены асимптотические законы затухания возмущений, вносимых тонкими телами вращения в равномерный звуковой поток вязкого теплопроводящего газа. Подобные задачи для течений газожидкостной смеси не рассматривались.

Особенностью газожидкостной смеси является интенсивный теплообмен между газовыми пузырьками и окружающей их жидкостью. Количество тепла, переходящего от пузырька в жидкость, прямо пропорционально их разности температур, при этом жидкая фаза с точки зрения термодинамики играет роль термостата. В монографиях [4, 5] на основе экспериментальных данных, например, [6], отмечено, что главным диссипативным механизмом может явиться тепловая релаксация.

В настоящей работе на основе односкоростной модели газожидкостной смеси, температуры фаз которой различны, выводятся двумерные нелинейные упрощенные уравнения и приводится их частичная классификация. Полученные уравнения типа коротких волн описывают стационарные течения смеси, в которых термодинамическое поведение пузырьков близко к изотермическому. Показано, что влияние тепловой релаксации на вид уравнений эквивалентно наличию второй вязкости. Приводится математическая аналогия между течениями рассматриваемой смеси и реального газа. В частности, когда структура потока смеси формируется под воздействием лишь эффектов сжимаемости и вязкости, решена задача обтекания профиля (плоская задача). Найдено точное решение, представляющее возмущения, вносимые двумерным диполем в равномерный поток смеси, скорость которого на бесконечности равна изотермической скорости звука.

*1. Исходные уравнения.* Предположим, что в монодисперсной смеси жидкая и газовая фазы движутся с одинаковой скоростью, при этом несущая жидкость обладает эффектами сжимаемости и вязкости, а газовая фаза представляет собой пузырьки calorически совершенного газа. Ограничимся рассмотрением течений, где в смеси не происходит существенного пересжатия газовой фазы. Будем считать, что ввиду сильного влияния температуры на плотность газа теплообмен между пузырьками и жидкостью определяется лишь тепловым сопротивлением

газа и потому температуру жидкой фазы примем постоянной. Полагая, что дробление, столкновение, слияние пузырьков отсутствуют и не происходит их новых образований, уравнения стационарного движения газожидкостной смеси возьмем в виде [4, 5]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{r}{y}(\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + r \frac{v}{y} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{r}{y} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + r \frac{v}{y} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{2r}{y} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y} \right) \quad (1.3)$$

$$P_2 - P = L \equiv (1 - \varphi_1) \rho_1 R \left( u \frac{\partial L_1}{\partial x} + v \frac{\partial L_1}{\partial y} \right) + \frac{3}{2} (1 - \varphi_2) \rho_2 L_1^2 + \frac{4\mu}{R} L_1 -$$

$$- \frac{R}{a_1} \left[ u \frac{\partial}{\partial x} \left( P_2 - \frac{4\mu}{R} L_1 \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( P_2 - \frac{4\mu}{R} L_1 \right) \right] \quad (1.4)$$

$$L_1 \equiv u \frac{\partial R}{\partial x} + v \frac{\partial R}{\partial y}, \quad P_2 = c_{p2} (\gamma - 1) \rho_2 T_2, \quad \frac{\rho_2 \beta}{\rho_1 (1 - \beta)} = \text{const} \quad (1.5)$$

$$\rho_2 R^3 = \text{const}, \quad \rho = \rho_1 (1 - \beta) + \rho_2 \beta, \quad P = P_1 (1 - \beta) + P_2 \beta \quad (1.6)$$

$$u \frac{\partial P_1}{\partial x} + v \frac{\partial P_1}{\partial y} = - \frac{3\gamma P_2}{R} L_1 - \frac{3(\gamma - 1) k_2 \text{Nu}}{2R^2} (T_2 - T_1) \quad (1.7)$$

$$\varphi_1 = \frac{1.13^{1/3} - \beta}{1 - \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{1.47\beta^{1/3} - 1.33\beta}{1 - \beta}, \quad \text{Nu} = \frac{Rz}{k_2}$$

Здесь  $x, y$  — оси декартовой, либо цилиндрической системы координат,  $u$  и  $v$  — составляющие вектора скорости частиц смеси вдоль этих осей,  $P$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $\beta$  — объемное газосодержание,  $R$  — радиус пузырька,  $a$  — скорость звука,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости,  $k_2$  и  $\sigma$  — коэффициенты теплопроводности и межфазного теплообмена,  $\gamma = c_{p2} / c_{v2}$ ,  $c_{p2}$  и  $c_{v2}$  — удельные теплоемкости соответственно при постоянном давлении и объеме. Индексы „1“ и „2“ относятся к параметрам течения соответственно жидкой и газовой фаз, а параметры, характеризующие течение всей смеси, индексов не имеют. Для плоскопараллельных течений —  $r=0$ , для течений с осевой симметрией —  $r=1$ . Поправочные коэффициенты  $\varphi_1, \varphi_2$ , впервые введенные в [4,7], учитывают конечность величины  $\beta$  и неоднородность газового пузырька в безграничной жидкости.

Значения параметров смеси и фаз в невозмущенном состоянии

отметим звездочкой, а характерную длину в направлении оси  $x$  обозначим через  $l$ .

Предположим, что в рассматриваемой области течения значения всех параметров смеси и фаз мало отклоняются от соответствующих значений в набегающем равномерном установившемся потоке, направление которого близко к оси  $x$ . Будем считать, что скорости частиц смеси в каждой точке пространства мало отличаются по величине от изотермической скорости звука  $a_{*}$ . По аналогии с теорией трансзвуковых течений газа [1-3,8] введем новые независимые переменные

$$x = lx_1, \quad y = \frac{l}{\Delta} y_1 \quad (1.8)$$

где  $\Delta$  — безразмерный малый параметр. Отсюда видно, что поперечный размер возмущенной области намного превосходит продольный. При неравномерной роли координат  $x$  и  $y$  составляющие возмущенного вектора скорости вдоль них также будут иметь различные порядки величины

$$u = a_{*} (1 + \varepsilon u'), \quad v = \varepsilon \Delta a_{*} v' \quad (1.9)$$

Здесь  $\varepsilon$  — второй безразмерный малый параметр. Относительно возмущений скорости и остальных характерных параметров потока примем, что они имеют такой же порядок малости, что и продольная составляющая вектора возмущенной скорости:

$$P = P_{*} (1 + \varepsilon P'), \quad \rho = \rho_{*} (1 + \varepsilon \rho'), \quad R = R_{*} (1 + \varepsilon R'), \quad \beta = \beta_{*} + \varepsilon \beta', \quad (1.10)$$

$$a = a_{*} (1 + \varepsilon a'), \quad \rho_i = \rho_{*} (1 + \varepsilon \rho'_i), \quad P_i = P_{*} (1 + \varepsilon P'_i), \quad i = 1, 2$$

Что касается возмущения температуры в газовом пузырьке, то, ввиду рассмотрения квазизотермического процесса, полагаем, что оно имеет больший порядок малости

$$T_2 = T_{*} (1 + \varepsilon^2 T'_2) \quad (1.11)$$

Согласно определению (1.6) плотности смеси, уравнение неразрывности (1.1) можно преобразовать к виду

$$\frac{1 - \beta}{\rho_1} \left( u \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right) - \frac{3\beta}{R} \left( u \frac{\partial R}{\partial x} + v \frac{\partial R}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + r \frac{v}{y} = 0 \quad (1.12)$$

Исключив из уравнения (1.7) давление посредством соотношений (1.5), получим

$$u \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{3T_1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{3T_1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} \right) =$$

$$-\frac{3\gamma T_2}{R} \left( u \frac{\partial R}{\partial x} + v \frac{\partial R}{\partial y} \right) - \frac{3k_2 N_{11}}{2\rho_2 c_{v2} R^2} (T_2 - T_*) \quad (1.13)$$

Для рассматриваемого близкого к изотермическому процессу расширения возмущения разложим функцию  $P_1 = P_1(\rho_1, T_1)$  в ряд Тейлора вблизи положения локального термодинамического равновесия жидкой фазы и учтем, что температура ее практически не меняется. Тогда

$$dP_1 = a_1^2 dy_1, \quad a_1^2 = \left( \frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} \right)_{T_1} \quad (1.14)$$

Здесь  $a_1$  — изотермическая скорость звука в жидкости.

Используя определение (1.6) давления смеси, а также уравнения (1.5) состояния газа и пузырька и формулу (1.14), стационарный вариант уравнения пульсации пузырька (1.4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{(1-\beta)P_2}{T_2} \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = (1-\beta)a_1^2 \frac{\partial y_1}{\partial x} + \\ + \beta(1-\beta)(P_2 - P_1) \left( \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Комбинирование первого из уравнений импульсов смеси (1.2) с (1.4) и уравнениями состояния (1.5), (1.6) дает

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{P_2}{T_2} \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\gamma \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + r \frac{v}{y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{r}{y} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Некое уравнение, описывающее стационарное течение газожидкостной смеси, должно быть выведено из упрощенной в порядке системы уравнений (1.12)–(1.16), в которой необходимо будет последовательно исключать члены порядка единицы. В дальнейшем, при упрощении уравнений, штрихи над безразмерными возмущениями параметров течения опускаются.

2. *Вывод определяющего уравнения.* Применяя преобразования (1.8)–(1.11) к уравнениям (1.1), (1.4), (1.15) и удерживая главные члены порядка единицы, находим

$$u = -u, \quad P = P_2 - \frac{\rho_2 a_1^2}{P_2} u, \quad R = \frac{\rho_2 a_1^2}{\rho_1 P_2} u \quad (2.1)$$

Учитывая (2.1), аналогичным образом из проекции уравнения Навье-Стокса на ось  $y$  (1.3) выводим соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1} \quad (2.2)$$

означающее, что в рассматриваемом приближении в потоке газожидкостной смеси вихри отсутствуют, то есть течение — потенциальное.

В том же приближении упрощения соотношений (1.5), (1.6), уравнений (1.12), (1.13) и их последующие комбинации с формулами (2.1) дают

$$\rho_2 = -3R, \quad \rho_1 = \frac{1}{1-\beta_*} \left( \frac{\beta_* \rho_* a_{r_*}^2}{P_*} - 1 \right) u, \quad \beta = \beta_* \left( \frac{\rho_* a_{r_*}^2}{P_*} - 1 \right) u \quad (2.3)$$

$$T_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{R_*^2 2(\gamma-1) \text{Pe}}{l^2} \frac{\partial R}{\text{Nu} \partial x_1}, \quad \text{Pe} = \frac{l a_{r_*}}{l_2}, \quad l_2 = \frac{k_2}{\rho_2 c_p^2}$$

где  $\text{Pe}$  — число Пекле,  $\lambda_2$  — коэффициент температуропроводности газа. При выводе формул (2.1) — (2.3) постоянные интегрирования равны нулю вследствие распространения возмущения по покоящейся в системе координат  $(x_1, y_1)$  смеси. Здесь и далее примем, что порядки величин чисел Нуссельта и Пекле совпадают, так что их отношение есть величина порядка единицы.

В рассматриваемом приближении, разлагая  $a_1 = a_1(z_1, T_1)$  в ряд Тейлора и оставляя главные члены, нетрудно получить

$$a_1 = (m-1)z_1, \quad m = \frac{1}{a_{1*}} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 a_1) \right]_* \quad (2.4)$$

Согласно определению изотермической скорости звука в смеси [9, 10], имеем

$$\frac{1}{a_{r_*}^2} = \frac{(1-\beta_*)\rho_*}{\rho_{1*} a_{1*}^2} + \frac{\beta_* \rho_*}{P_*} \quad (2.5)$$

Теперь применим преобразования (1.8) — (1.11) к уравнениям (1.12), (1.15), (1.16) и при их упрощении оставим также члены первого порядка малости. Комбинируя получаемые уравнения друг с другом и учитывая формулу (2.5), исключим из рассмотрения члены порядка единицы. Далее, подставляя формулы (2.1) — (2.4) в итоговое уравнение, все члены которого имеют первый порядок малости, окончательно получим

$$\varepsilon^2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + r \frac{v}{y_1} \right) - \frac{R^2}{l^2} \gamma_* \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \quad (2.6)$$

$$= \left( \frac{1}{\text{Re}} \delta_r + \frac{R_* a_r}{l a_{1*}} \delta_a + \frac{k_*^2 \text{Pe}}{l^2 \text{Nu}} \delta_r \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad u_1 = \frac{u}{\beta_*}, \quad v_1 = \frac{v}{\beta_*}$$

$$\alpha_r = \left| 1 - \frac{(1-\beta_*)\rho_* a_{r_*}^2}{\rho_{1*} a_{1*}^2} \right|^2 + m \frac{\beta_* (1-\beta_*) \rho_*^2 a_{r_*}^2}{\rho_{1*}^2 a_{1*}^2}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_* l a_{r_*}}{\mu}$$

$$\delta_r = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{\rho_* a_{r_*}^2}{P_*} A_r, \quad \delta_a = \frac{1}{2} A_r, \quad \delta_r = \frac{\gamma-1}{3\gamma} \left| 1 - \frac{(1-\beta_*)\rho_* a_{r_*}^2}{\rho_{1*} a_{1*}^2} \right|$$

$$A_c = \left(1 - \frac{P_*}{\rho_{1*} a_{1*}}\right) \left[1 - \frac{(1 - \beta_*) \rho_* a_{c*}^2}{\rho_{1*} a_{1*}^2}\right], \quad T_c = \frac{(1 - \varphi_{1*}) \rho_{1*} a_{1*}^2}{6 P_*} A_c$$

Система уравнений (2.6) и (2.2) полностью описывает квазиизотермический режим распространения возмущений в звуковом потоке газожидкостной смеси. Влияние проходящей в газовой фазе тепловой релаксации на процесс распространения аналогично воздействию второй (продольной) вязкости смеси. Такой вывод находится в полном соответствии с результатами [8, 11]. Подчеркнем, что порядки величины тепловой релаксации и дисперсии одинаковы (если, конечно,  $Re/Nu \sim 1$ ).

Перейдем к частичной классификации возможных течений квазиизотермического трансзвукового потока газожидкостной смеси, связанной с эффектами дисперсии и тепловой релаксации.

1) Пусть в уравнении (2.6) все члены одного порядка, то есть  $\sim \Delta^2 \sim 1/Re \sim R_*^2/l^2 \sim R_* a_{c*}/la_{1*}$ . Полагая для простоты

$$\epsilon_2 \epsilon_c = \frac{\Delta^2}{2} = \frac{R_*^2}{l^2} \epsilon_c = \frac{1}{Re} \epsilon_c + \frac{R_* a_{c*}}{l a_{1*}} \epsilon_c + \frac{R_*^2}{l^2} \frac{Pe}{Nu} \epsilon_c$$

приходим к уравнению

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + r \frac{v_1}{y_1} \right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$

2) Если считать эффекты вязкости и сжимаемости малыми в сравнении с тепловой релаксацией ( $1/Re \sim R_* a_{c*}/la_{1*} \ll \epsilon \sim \Delta^2 \sim R_*^2/l^2$ ), то уравнение (2.6) снова примет предыдущий вид.

Отметим, что в квазиизотермических околосзвуковых течениях в рассматриваемом приближении хотя и имеет место постоянство температуры в газовой фазе, вовсе пренебрегать теплообменом между пузырьками и жидкостью нельзя.

3) Пренебрежение всеми эффектами диссипации, а следовательно и дисперсии, оправдано при  $R_*^2/l^2 \sim 1/Re \sim R_* a_{c*}/la_{1*} \ll \epsilon \sim \Delta^2$ , что приводит (2.6) к уравнению Кармана-Фальковича [1,8].

Пусть теперь  $R_*^2/l^2 \ll 1/Re \sim \epsilon \sim \Delta^2 \sim R_* a_{c*}/la_{1*}$ . Подчиним безразмерные коэффициенты в (2.6) связям

$$\epsilon_2 \epsilon_c = \frac{\Delta^2}{2} = \frac{1}{Re} \epsilon_c + \frac{R_* a_{c*}}{l a_{1*}} \epsilon_c$$

означающие, что формирование структуры потока смеси происходит под воздействием эффектов нелинейности, вязкости и сжимаемости. Уравнение (2.6) сведется к виду

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left( \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + r \frac{v_1}{y_1} \right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad (2.7)$$

совпадающему с уравнением из [2], где численно исследовалось ван-

яние вязкости и теплопроводности на асимптотическую картину обтекания тонких тел вращения звуковым потоком реального газа.

5) Если же, наконец, принять  $\varepsilon \sim R_0^2/l^2 \ll \Delta^2 \sim 1/\text{Re} \sim R_0 a_{\infty}/l a_{10}$  и для простоты полагать

$$\frac{\Delta^2}{2} = \frac{1}{\text{Re}} \hat{\gamma}_c + \frac{R_0 a_{\infty}}{l a_{10}} \hat{\gamma}_a$$

то приходим к уравнению Рыжова [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{v}{y_1} = 0 \quad (2.8)$$

описывающему течение смеси, формирующегося, в основном, под воздействием эффектов вязкости и сжимаемости. В случае осесимметричного течения ( $\varepsilon=1$ ) оно применено в [1, 8] для исследований задач обтекания тонких тел вращения звуковыми потоками реального газа и химически активной многокомпонентной газовой смеси.

3. *Обтекание профиля.* В случае вязкого течения ( $\varepsilon=0$ ) формулируем для уравнений (2.8) и (2.2) внешнюю граничную задачу обтекания [12, 13]

$$\text{при } |x_1| \rightarrow \infty \quad \text{для любых } y_1 \quad u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

$$\text{при } y_1 \rightarrow 0 \quad v \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Решение поставленной задачи будем искать в классе автомодельных функций. Предварительно обратимся к системе уравнений (2.7) и (2.2), искомые решения которых представим в виде

$$u_1 = y_1^{-n} f(\xi), \quad v = y_1^{-p} g(\xi), \quad \xi = x_1 y_1^{-s}$$

Аналогично [2], подставляя эти решения в систему и устремляя  $y_1$  к бесконечности, оставив  $x_1$  конечным, найдем порядки убывания членов системы уравнений в зависимости от  $y_1$

$$u_1 \frac{du_1}{dx_1} \sim y_1^{-2n-s}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \sim y_1^{-p-s-1}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \sim y_1^{-n-2s}, \quad p = n+1-s$$

Исходя из приведенных оценок, уравнение (2.7) допускает автомодельное решение при  $s = 2/3$ ,  $p = -(3n+1)/3$ . Требования, при которых реализуется (2.8), приводят к системе неравенств  $s > 1/2$ ,  $n > 2 - 2s$ ,  $n > s$ . При полученном значении  $s = 2/3$  из этой системы следует  $n > 2/3$ . Таким образом, автомодельные решения уравнения Рыжова (2.8) можно представить как

$$u = y_1^{-n} f(\xi), \quad v = y_1^{-(3n+1)/3} g(\xi), \quad \xi = x_1 y_1^{-2/3}, \quad n > \frac{2}{3}$$

В плоском случае ( $\varepsilon=0$ ) функция  $f(\xi)$  будет удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{4}{9} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{12n+10}{9} \xi \frac{df}{d\xi} + n(n-1)f = 0 \quad (3.3)$$

после решения которого функция  $g(\xi)$  определится из равенства

$$g = \frac{3}{3n+1} \left( \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{4}{9} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{2n}{3} \xi f \right) \quad (3.4)$$

Можно показать, что асимптотическими разложениями трех линейно-независимых решений уравнения (3.3) являются:

$$f = b_1 |\xi|^{-3n/2} \left[ 1 + \frac{27}{16} n \left( n + \frac{2}{3} \right) \left( n + \frac{4}{3} \right) |\xi|^{-3} + o(|\xi|^{-6}) \right] \quad (3.5)$$

$$f = b_2 |\xi|^{-3n/2-3/2} \left[ 1 - \frac{9}{8} (n+1) \left( n + \frac{5}{3} \right) \left( n + \frac{7}{3} \right) |\xi|^{-3} + o(|\xi|^{-6}) \right] \quad (3.6)$$

$$f = b_3 |\xi|^{-3n-3/2} \exp\left(-\frac{4}{27} \xi^3\right) \left[ 1 - \frac{3(27n^2-45n+17)}{16} |\xi|^{-3} + o(|\xi|^{-6}) \right] \quad (3.7)$$

где  $b_1, b_2, b_3$  — произвольные константы.

Краевым условиям (3.1) и (3.2) полностью удовлетворяют решения (3.5) и (3.7), причем последнее непригодно при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Решение (3.6) удовлетворяет краевым условиям (3.1), но не (3.2). Таким образом, аналогично [1, 8, 12], задача нахождения автомодельных решений уравнений (2.8), (2.2) сводится к задаче определения собственных значений уравнения (3.3). Требуется найти такие значения параметра  $n$ , при которых решение уравнения (3.3) определялось разложением (3.5), если  $\xi \rightarrow -\infty$  и при  $\xi \rightarrow \infty$  удовлетворяло условию

$$\frac{3n+1}{2} \xi^{(3n+1)/2} g(\xi) \rightarrow 0$$

Последнее условие эквивалентно требованию обращения в нуль постоянной  $b_2$  в разложении (3.6). Весь спектр собственных значений приведен в [13], а именно:  $n = (2N+1)/3$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$ . Для сформулированной задачи приемлемым первым собственным значением является  $n=1$ . Тогда уравнение (3.3) один раз интегрируется и после замен

$$f = \chi^{2/3} w(\chi), \quad \chi = -4\xi^3/27$$

приведется к канонической форме уравнения Куммера [14, 15]

$$\chi \frac{d^2 w}{d\chi^2} + \left( \frac{4}{3} - \chi \right) \frac{dw}{d\chi} - \frac{7}{6} w = 0$$

Используя стандартные обозначения вырожденных гипергеометрических функций (функций Куммера), напишем общее решение [15]

$$f = c_1 \chi^{2/3} \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \chi\right) + c_2 \chi^{1/3} \Phi\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \chi\right) \quad (3.8)$$

Связь между постоянными  $c_1$  и  $c_2$  определим из условия стремления к нулю асимптотического представления функции  $f$  при  $\chi \rightarrow \infty$ . Получим

$$c_2 = -\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} c_1 = -2\sqrt{3} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} c_1$$

Учитывая полученную связь, формулу (3.8) перепишем в виде

$$f = c_1 \eta^{2/3} \left[ \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - 2\sqrt{3} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \eta^{-1/3} \Phi\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \eta\right) \right] \quad (3.9)$$

Решение в форме (3.9) удобно для выяснения асимптотического поведения функции  $f$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . Не используя асимптотическое представление функций Куммера, имеем

$$f = \frac{2}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 (-\eta)^{-1/2} + \dots = \sqrt{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 \eta^{-3/2} \quad (3.10)$$

Для нахождения асимптотики функции  $f$  при  $\eta \rightarrow \infty$  введем в рассмотрение функцию Трикоми [15]. Тогда

$$3\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)f(\eta) = -\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)c_1\eta^{2/3}\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right)$$

Используя асимптотическое представление функций Трикоми при  $\eta \rightarrow \infty$ , находим

$$f = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 \eta^{-1/2} + \dots = -\frac{3}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 (-\eta)^{-3/2} \quad (3.11)$$

Скомбинируем равенство (3.4) с полученным из (3.3) после однократного интегрирования уравнением для функции  $f$  и далее перейдем к новой переменной  $\eta$ . Функция  $g$  определится теперь из равенства

$$g(\eta) = 2^{2/3} \eta^{1/3} \left( \frac{df}{d\eta} - \frac{1}{3\eta} f \right)$$

Применяя правила дифференцирования к функциям Куммера и Трикоми, найдем точное выражение для функции  $g$

$$g(\eta) = c_1 2^{1/3} \left[ \frac{2}{3} \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - \frac{1}{3} \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{3}, \eta\right) - \frac{5\sqrt{3}}{2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \eta^{2/3} \Phi\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \eta\right) \right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} 2^{1/3} c_1 \left[ \frac{1}{3} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - \frac{7}{6} \eta \Psi\left(\frac{13}{6}, \frac{7}{3}, \eta\right) \right]$$

Аналогично выводам формул (3.10) и (3.11) отсюда нетрудно получить асимптотические представления функции  $g$  [14, 15] при  $\eta \rightarrow -\infty$

$$g = \frac{7}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} 2^{1/3} c_1 (-\eta)^{-7/6} + \dots = \frac{21\sqrt{3}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 \xi^{-7/2}$$

при  $\eta \rightarrow \infty$

$$g = \frac{5\sqrt{3}}{18} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} 2^{1/3} c_1 \eta^{-7/6} + \dots = \frac{45}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 (-\xi)^{-7/2}$$

Соответствующие полученным формулам разложения продольной и поперечной составляющих вектора возмущенной скорости начинаются с членов

при  $\xi \rightarrow -\infty$

$$u = -\frac{3}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 |x_1|^{-3/2} + \dots, \quad v = \frac{45}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 |x_1|^{-7/2} y_1 + \dots$$

при  $\xi \rightarrow \infty$

$$u = \sqrt{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 x_1^{-3/2} + \dots, \quad v = \frac{21\sqrt{3}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_2 x_1^{-7/2} y_1 + \dots$$

Построенное решение описывает возмущения, которые вносит находящийся в начале координат двумерный диполь в равномерный поток, скорость которого на бесконечности равна в точности изотермической скорости звука газожидкостной смеси. Действительно, для момента диполя имеем [16]

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 v dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g(\xi) d\xi = -5\sqrt{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1$$

## STATIONARY SONIC FLOW OF GAS-FLUID MIXTURE UNDER QUASITHERMIC BEHAVIOUR OF GAS PHASE

G. G. OHANIAN

Ա մ փ ո ս ր ւ մ

Դուրս էն բերված կարճ աշխրհների տիպի երկչափ ոչ դժային համասարումները: Ստացված համասարումները նկարագրում են այնպիսի զաղահղուկ խառնուրդի ստացիոնար շարժումը, որի պղպշակների վերմոդինամիկական վարքը մոտ է իզոթերմին: Գիտարկվող մոտավորությունում բվազիկոթերն տրանսմայնային շարժման ղեկարում ցույց է արված, որ շնայած զագային փուլում ջերմատիճանը մնում է անփոփոխ, այնուհանդերձ ջերմափոխանակությունը պղպշակների և նրանց շրջապատող հեղուկի միջև տրամաբեղ չի կարելի: Ջերմային սեղաբառացիայի ազդեցությունը համասարումների տեսքի վրա համարժեք է երկրորդ (քնդաչանական) մածուցիկության առկայությանը:

Մասնավոր ղեկարում, երբ պատճենուկ խառնուրդի շտանքի կառուցվածքը բնորոշվում է միայն մածուցիկության և սեղմելիության էֆեկտների առկայությամբ, լուծված է հարթ մարմինների շրջառան խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа.—ПММ, 1965, т. 29, № 6, с. 1004—1011.
2. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений.—ПММ, 1964, т. 28, № 6, с. 996—1007.
3. Диеперов В. И., Рыжов О. С. Второе приближение в асимптотической теории обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого газа.—ПММ, 1967, т. 31, № 5, с. 783—793.
4. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. Кутителадзе С. С., Накоряков В. Г. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
6. Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Искраев Г. Г., Шрейбер И. Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа.—В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
7. Губаддзуля А. А., Шаинбаев А. И., Нигматулин Р. И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, № 2, с. 78—86.
8. Наполитано Т. Дж., Рыжов О. С. Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5, с. 1229—1261.
9. Ван-Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.—В кн.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
10. Оганян Г. Г. Распространение слабых волн в релаксирующей газожидкостной смеси.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 3—13.
11. Мандельштам Л. И., Леонтович М. А. К теории поглощения звука в жидкостях.—Ж. эксперим. и теор. физ., 1937, т. 7, № 3, с. 438—449.
12. Лодыженский М. Д. О некоторых интегралах уравнений околозвуковых течений газа.—Инж. ж., 1962, т. 2, № 1, с. 6—10.

13. Дзесперов В. И. О функции Грина линейризованного вязкого трансзвукового уравнения.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 5, с. 1265—1272.
14. Справочник по специальным функциям Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган.— М.: Наука, 1979. 830 с.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции Т. 2. М.: Наука, 1978. 295 с.
16. Прудников А. П., Бричков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
7 XII.1987