ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42 № 5, 1989. Механика

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГИБКОГО ТОКОНЕСУЩЕГО СТЕРЖНЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ГАЛОЯН В. Ц., КАЗАРЯН К. Б.

В последние годы во многих работах [1, 2] рассматривается вопрос возможности возникновения хаотического движения в детерминистических динамических системах. Магнитоупругая система, описанная в работе [2], одна из немногих, где это явление исследовано как теоретически, так и экспериментально.

В настоящей работе с этой точки зрения исследуется другая магнитоупругая система, а именно, сжатый упругий гибкий стержень, по которому течет переменный ток и который находится во внешнем постоянном магнитном поле. С помощью методов качественной теории динамических систем показано, что в этом случае можно указать область изменения параметров, для которой детерминистическое нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее систему, допускает решение в виде хаотического движения (странного аттрактора).

§ 1. *Основное уравнение*

Рассмотрим динамическое нелинейное поведение сжатого упругого токонесущего стержня кругового сечения во внешнем постоянном магнитном поле. Считается, что концы стержня закреплены на шарнирах в неподвижных опорах так, что не могут испытывать продольного смещения. Предполагается также, что ток в стержне достаточно слаб, что позволяет пренебречь джоулевым эффектом и самовоздействием [3]. У одного из концов стержня, в точке, сколь угодно близкой к неподвижному шарниру, действует «мертвая» механическая сила.

Введем систему координат с осью x вдоль оси стержня и осью z по направлению, обратной вектору магнитной индукции. Вектор $\vec{J}$ протекающего по стержню электрического тока в деформированном состоянии стержня представим следующим образом:

$$\vec{J} = J_0 \cos(\omega t)\,\vec{\tau}$$

где $\vec{\tau}(x, y)$ — единичный касательный вектор в точке (x, y) с проекциями dx/dl, dy/dl (предполагается, что деформация стержня происходит в плоскости x, y), ω — частота заданного переменного тока, а J_0 — его амплитуда, l — координата длины дуги осевой линии стержня.

На единичную длину стержня действует сила Ампера

$$\vec{K}_1 = \vec{J} \times \vec{B}$$

и демпфирующая сила вязкого трения

$$\vec{K}_2 = -k \dot{y} \vec{i}_y$$

где k — коэффициент демпфирования.

В силу того, что концы стержня закреплены, на концах стержня возникает сила Q, обусловленная его удлинением. В приближении закона Гука она имеет вид $Q = -ES\Delta L / L$ (E — модуль Юнга, ΔL — удлинение, S — площадь поперечного сечения, L — расстояние между концами стержня). В принятой системе координат

$$Q = -\frac{ES}{L}\int_0^L \left(\sqrt{1+y'^2}-1\right)dx$$

где штрих означает дифференцирование по координате x.

Для описания этой системы имеем следующие уравнения [4, 5]. Уравнение движения стержня без учета инерции вращения имеет вид

$$\frac{d\vec{F}}{dl} + \vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \rho S \ddot{\vec{r}} \qquad (1.1)$$

где $\vec{F}$ — сила внутренних напряжений, dl — элемент длины, ρ — удельная плотность вещества. Точка сверху означает дифференцирование по времени.

Имеем также уравнение сохранения момента в виде

$$\frac{d\vec{M}}{dl} = \vec{F} \times \vec{\tau} \qquad (1.2)$$

где $\vec{M} = EI(\vec{\tau} \times d\vec{\tau} / dl)$ — момент сил внутренних напряжений, $I = \pi R^4 / 4$ — момент инерции круглого стержня с радиусом R.

С помощью (1.1) и (1.2) можно получить уравнение в частных производных для определения неизвестной функции поперечного перемещения $y = y(x, t)$. Для этого запишем уравнение (1.1) в проекциях на оси x и y, а уравнение (1.2) — в проекции на ось z.

$$F_x' - J_0 B\cos(\omega t) y' = \rho S \ddot{x}(1 + y'^2)^{1/2} \qquad (1.3)$$

$$F_y' + J_0 B\cos(\omega t) = (\rho S \ddot{y} + k \dot{y})(1 + y'^2)^{1/2} \qquad (1.4)$$

$$F_x y' - F_y = EI\left(y''(1 + y'^2)^{-3/2}\right)' \qquad (1.5)$$

Допустим, что продольная сжимаемость мала по сравнению с деформациями изгиба стержня, то есть рассмотрим поперечное движение стержня. Тогда, из уравнения (1.3) получим после интегрирования

$$F_x = J_0 B\cos(\omega t)y + C$$

где постоянная интегрирования C — компонента F_x при $y=0$ и, следовательно, равна $-(P+Q)$. Отсюда получаем следующее выражение:

$$F_x = J_0 B\cos(\omega t) - (P+Q)$$

Исключим из уравнений (1.4) и (1.5) величину F_y, используя полученное для F_x выражение. Продифференцируя (1.5) и подставляя F_y, из (1.4) окончательно получим

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + EI(1+y'^2)^{-1/2}\{y''(1+y'^2)^{-3/2}\}'' + (P+Q)(1+y'^2)^{-1/2} -$$

$$- J_0 B\cos(\omega t)(1+y'^2)^{-1/2}[1+(yy')'] = 0 \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.6) — основное уравнение задачи. В безразмерной форме оно имеет вид

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + a_1(1+y'^2)^{-1/2}\{y''(1+y'^2)^{-3/2}\}'' + a_3 y''(1+y'^2)^{-3/2} -$$

$$- a_2\cos(\Omega t)(1+y'^2)^{-1/2}[1+(yy')'] - a_4 Q y''(1+y'^2)^{-1/2} = 0 \qquad (1.7)$$

где

$$Q = \int_0^1 \{(1+y'^2)^{1/2} - 1\}dx, \quad \alpha = \frac{k}{\rho\omega_0}, \quad a_1 = \frac{EI}{\rho\omega_0^2 L^4 S},$$

$$a_2 = \frac{J_0 B}{\rho\omega_0^2 LS}, \quad a_3 = \frac{P}{\rho\omega_0^2 L^2 S}, \quad a_4 = \frac{E}{\rho\omega_0^2 L^2}.$$

При получении (1.7) были введены безразмерные переменные $x \to (x/L)$, $y \to (y/L)$, $t \to (\omega_0 t)$, $\Omega = \omega/\omega_0$, где $\omega_0 = (\pi^4 EI/\rho L^4)^{1/2}$ — частота собственных колебаний в линейном приближении.

Уравнение (1.7) является уравнением в частных производных. Для получения конечномерной системы используем метод Галеркина, применяемый также в работах [1, 2] при исследовании хаотического движения. Ограничиваясь одномодовым приближением, имеем

$$y(x, t) = \frac{1}{\pi} A(t)\sin(\pi x)$$

Произведя стандартные преобразования, получим, что в кубическом по амплитуде A приближении уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\ddot{A} + \alpha\dot{A} - \gamma A + \delta A^3 = \beta\cos(\Omega t)\left(1 - \frac{1}{2}A^2\right) \qquad (1.8)$$

где

$$\gamma = \frac{\pi^2}{\rho\omega_0^2 L^2 S}\left(P - \frac{\pi^2 EI}{L^2}\right), \quad \delta = \frac{\pi^2}{2\rho\omega_0^2 L^2 S}\left[P/4 - \frac{\pi^2 EI}{L^2} + \frac{ES}{2}\right], \quad \beta = 4a_2$$

§ 2. Качественное исследование основного уравнения

В дальнейшем рассматривается уравнение (1.8), являющееся уравнением типа Дюффинга. В случае, когда $P > P^*$, где $P^* = \pi^2 EI/l^2$ — эйлерова критическая сила, имеем, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Для качественного исследования этого уравнения применим метод, основанный в работе [6] и подробно разработанный для классического уравнения Дюффинга в работе [1]. Он позволяет указать те области изменения параметров, где уравнение допускает хаотическое движение в качестве решения, исследовать структуру соответствующих множеств в фазовом пространстве и т. д. При этом уравнение (1.8) мы будем рассматривать как неавтономное возмущение гамильтоновой системы, которое сохраняет некоторые черты невозмущенной системы. Перепишем уравнение (1.8) в виде двух уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \gamma x_1 - \delta x_1^3 + \varepsilon\left(\beta_1\cos(\Omega t)\left(1 - \frac{1}{2}x_1^2\right) - x_1 x_2\right) \qquad (2.1)$$

где ε — малый параметр, а $\varepsilon\beta_1 = \beta$, $\varepsilon\alpha_1 = \alpha$.

Далее, используя свойства (2.1) и применяя теорему о центральном многообразии, рассматриваются малые возмущения и в конце доказывается существование гомоклинической структуры («подковы» Смейла [7]) и наличие в ней странного аттрактора.

Невозмущенная система

$$\dot{x}_1 = x_2 = f(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = \gamma x_1 - \delta x_1^3 = g(x_1, x_2) \qquad (2.2)$$

имеет три неподвижные точки с координатами $(0, 0)$, $(+(\gamma/\delta)^{1/2}, 0)$ $(-(\gamma/\delta)^{1/2}, 0)$, первая из которых — неустойчивая точка типа седла, а две другие — центры. Точка $(0, 0)$ имеет гомоклиническую орбиту $x_0 = (2\gamma/\delta)^{1/2}\operatorname{sech}(\gamma^{1/2}t)$ [1]. Легко проверить, что седло $(0, 0)$ простое, то есть, что величина

$$\Delta \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) = -\beta + 3\alpha x_1^2$$

отрицательна в точке $(0, 0)$. В этом случае, согласно теореме Пуанкаре [6], в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ существует периодическое решение, которое стремится к седловой точке при $\varepsilon \to 0$. Для определения параметров этого движения используем теорему усреднения в форме, предложенной в [8].

Произведем замену переменных в (2.1), введя новые переменные z_1, z_2

$$z_1 = x_1\cos(\Omega t) - \frac{x_2}{\Omega}\sin(\Omega t), \quad z_2 = -x_1\sin(\Omega t) - \frac{x_2}{\Omega}\cos(\Omega t)$$

Согласно теореме о среднем, заменяя первые части в полученных уравнениях на их усредненные по периоду величины и перейдя к полярным координатам (z, Θ), получаем следующие окончательные уравнения:

$$\dot z = -\frac{1}{2\omega}\left[\alpha_1\omega z - \frac{1}{8}\beta z^2\sin\Theta + \beta\sin\Theta\right]$$

$$\dot\Theta = -\frac{1}{2\omega z}\left[(\gamma_2+\omega^2)z + \frac{3}{4}\delta z^3 + \frac{3}{8}\beta z^2\cos\Theta - \beta\cos\Theta\right] \qquad (2.3)$$

Неподвижные точки z^*, Θ^* этой системы уравнений соответствуют периодическому решению уравнения (2.1) вида $z^*\cos(\Omega t + \Theta^*)$. При этом амплитуда z^* является корнем алгебраического уравнения

$$z^2\left[\left(\frac{\alpha\omega}{(1/8)z^2-1}\right)^2 + \left(\frac{(3/4)\delta z^2+\gamma+\Omega^2}{(3/8)z^2-1}\right)^2\right] = \beta^2$$

а фаза Θ^* определяется из выражения

$$\sin\Theta^* = \frac{\alpha\Theta}{\beta}\,\frac{z^*}{(1/8)z^{*2}-1}$$

при соблюдении порогового условия $z^* < \frac{4\alpha\Omega}{\beta} + \left(\frac{16\alpha^2\Omega^2}{\beta^2}+8\right)^{1/2}$.

При увеличении параметров α, β периодическое движение разрушается. Но согласно теореме о центральном многообразии [9] при не слишком больших значениях параметров сохраняются характерные черты фазового портрета около гиперболических точек. В качестве невозмущенной в этом случае выберем систему

$$\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = -\alpha x_2 + \gamma x_1 - \delta x_1^3 \qquad (2.4)$$

неподвижные точки которой при $\gamma \neq 0$, $\alpha^2 < 8\gamma$ являются гиперболическими — седло и фокусы.

Легко можно доказать, что фазовое пространство системы (2.1) содержит притягивающее множество (аттрактор). Для этого достаточно использовать те же функции Ляпунова, что и в работе [8] и определить их производные на траекториях системы. Это притягивающее множество сохраняет характерные черты системы (2.4). При этом периодической (при малых ε) орбите γ_ε соответствуют два многообразия: неустойчивое $W^u(\gamma_\varepsilon)$ и устойчивое — $W^s(\gamma_\varepsilon)$. Для анализа возможных случаев расположения этих многообразий, которые сохраняются и при $\varepsilon \neq 0$, используем функцию Мельникова, введенную в работе [6]. В нашем случае ее можно вычислить, используя выражение

$$\Delta_1(t_0) = -\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\dot x\left(\beta_1\cos(\Omega t)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right) - \alpha_1\dot x\right)dt + O(\varepsilon^2)$$

где $x = x_0(t-t_0) = (2\gamma/\delta)^{1/2}\operatorname{sech}(\gamma^{1/2}(t-t_0))$. Произведя соответствующие вычисления, получим

$$\Delta_1(t_0) = \left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)^{1/2}\left[\pi\beta(\Omega\gamma^{1/2})\,\frac{\Omega^2+\gamma-6\delta}{6\delta}\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega\gamma^{-1/2}}{2}\right)\sin(\Omega t_0) + \right.$$

$$+\frac{2}{3}\alpha\gamma\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{1/2}\Big\}$$

Согласно [6], если функция Мельникова имеет простые нули, многообразия $W^s(\gamma_\varepsilon)$ и $W^u(\gamma_\varepsilon)$ пересекаются трансверсально. Но, так как функция $\Delta_\varepsilon(t_0)$ — периодическая, в этом случае имеет гомоклиническую структуру в притягивающем множестве и, следовательно, странный аттрактор [8].

Используя (2.5), можно получить неравенство, при выполнении которого $\Delta_\varepsilon(t_0)$ имеет нули. Это условие имеет вид

$$\beta > \frac{4\alpha\delta\gamma}{\pi\Omega}\left(\frac{2\gamma}{\lambda}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi\Omega\gamma^{-1/2}}{2}\right)}{|\Omega^2+\gamma-6\delta|} \tag{2.6}$$

Для тонких стержней ($R/L \ll 1$) в пределах его прочности имеем $\delta \gg 1$. В этом случае имеем следующее выражение для критических значений индукции магнитного поля B^* и амплитуды тока J_0^*, превышение которых может привести к хаотическому движению стержня:

$$J_0^* B^* = \frac{1}{3\pi^2}\,\frac{\alpha\rho S L^2\omega_0^3}{\Omega}\,(a-1)^{3/2}\left(\frac{2\rho}{E}\right)^{1/2}$$

где $a = P/P^*$. Вычислим область критических значений внешней силы для медного стержня кругового сечения с следующими значениями параметров: $L=0{,}5$ м, $R=0{,}01$ м, $\omega=50$ Гц, $\alpha=10^{-2}$. В этом случае для $3{,}8\ H < P < 15{,}4H$ сила Ампера $J_0^* B^*$ принимает значения от 14 Н/м до 72,8 Н/м; в частности, при $J=50$А, $B=1$ Тл условие (2.6) выполняется.

Полученные результаты позволяют утверждать, что описанная магнитомеханическая система, движение которой подчиняется детерминистическому дифференциальному уравнению, допускает как периодическое, так и апериодическое хаотическое движение.

Авторы выражают благодарность участникам семинара «Волновые процессы» Института механики АН Арм. ССР за ценные советы при обсуждении работы.

DYNAMIC CHAOTIC BEHAVIOUR OF FLEXIBLE CURRENT— CARRING ROD IN A MAGNETIC FIELD

V. TS. GALOIAN, K. B. KAZARIAN

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՃԿՈՒՆ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՁՈՂԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՔԱՈՍԱՅԻՆ ՎԱՐՔԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ց. ԴԱԼՈՅԱՆ, Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է մեխանիկական ուժով սեղմված, ճկուն հոսանքակիր ձողի ոչ գծային տատանումների խնդիրը, որում անցնում է էլեկտրական հոսանք արտաքին մագնիսական դաշտի առկայությամբ։

Դինամիկական համակարգերի տեսության մեթոդների օգնությամբ ցույց է տրված, որ ձողի վարքը նկարագրող դետերմինիստական ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումը ունի քաոսային շարժումների լուծում (տարօրինակ ատրակտոր)։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marsden J. E.* Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics. — Philadelphia SIAM. 1981. 97 p.
2. *Moon F. C., Holmes P. J.* A magnetoelastic strange attractor. — J. Sound Vibr., 1979, v. 65, № 3.
3. *Chattopdhyay S., Moon F. C.* Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carring electric current. — J. Appl. Mech. 1975. v. 42, № 4.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости—М.: Наука, 1987. 248 с.
5. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
6. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях.—Тр. Московского мат. общества, т. 12, 1963.
7. *Смейл С.* Дифференциальные динамические системы.—УМН, 1970, т. 25, вып. 1.
8. *Holmes P. J.* A nonlinear oscillator with a strange attractor. — Phil. Trans Roy. Soc. London, v. 292A, № 1394. 1979.
9. Странные аттракторы, сб. ст., пер. с англ., М.: Мир, 1981. 197 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
1.VIII.1988