ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 5, 1989 Механика

УДК 539:534.1

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С ТУННЕЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

ПАРТОН В. З., ФИЛЬШТИНСКИЙ М. Л.

Динамические задачи теории упругости для изотропной среды с туннельными разрезами рассматривались, например, в [1—3]. Ниже в условиях плоской деформации изучается динамическая задача о взаимодействии трещин в неограниченной пьезоэлектрической среде. Соответствующая краевая задача сводится к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно амплитуд скачков перемещений на разрезах. Проводится асимптотический анализ механического поля в окрестности вершин разрезов. Коэффициенты интенсивности получены в виде функционалов, определенных на решениях интегральных уравнений краевой задачи.

Предлагается схема приближенного численного решения системы интегральных уравнений для тех случаев, когда в теле имеется несколько разрезов. Приводятся результаты расчетов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат $ox_1x_2x_3$ (x_3 — ось симметрии бесконечного порядка) неограниченную пьезоэлектрическую среду класса $6mm$, ослабленную туннельными вдоль оси ox_3 разрезами $L_j (j=1,2,\ldots,k)$. Пусть из бесконечности на разрезы падают плоские монохроматические волны, тип которых будет указан ниже, а на берегах L_j возможно действие постоянной вдоль оси ox_3 нагрузки $X_k(x_1, x_2, t) = \mathrm{Re}[P_k \exp(-i\omega t)]$ $(k=1,2)$. Будем предполагать, что P_k и кривизны контуров L_j — функции класса H [4]. Задача заключается в определении параметров разрушения среды с трещинами.

Полная система уравнений имеет вид:

уравнения состояния пьезосреды [5]

$$\sigma_{11} = c_{11}^D \varepsilon_1 + c_{12}^D \varepsilon_2 - h_{31} D_3, \quad \sigma_{22} = c_{12}^D \varepsilon_1 + c_{11}^D \varepsilon_2 - h_{31} D_3 \tag{1.1}$$
$$\sigma_{12} = (c_{11}^D - c_{12}^D)\varepsilon_{12}, \quad E_3 = -h_{31}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \beta_{33}^\varepsilon D_3$$

уравнения движения (суммирование по j)

$$\partial_j \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i, j = 1,2) \tag{1.2}$$

уравнения Максвелла [6].

$$\partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 = \frac{\partial D_3}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\partial_2 E_3 = -\mu \frac{\partial H_1}{\partial t}, \quad \partial_1 E_3 = \mu \frac{\partial H_2}{\partial t} \tag{1.4}$$

$$\partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 = 0$$

В (1.1)—(1.3) σ_{ij}, ε_{ij}, H_j, E_3, D_3 — соответственно механические напряжения и деформации, магнитная и электрическая напряженности и электрическое смещение; c_{ij}^E, h_{31} и β_{33}^s — соответственно, модули упругости, пьезоэлектрическая константа и диэлектрическая „непроницаемость", μ — магнитная проницаемость среды.

К системе (1.1)—(1.3) необходимо присоединить соответствующие граничные условия.

Для решения поставленной задачи введем векторный потенциал $H = \operatorname{rot} A$ (здесь и ниже берутся амплитудные значения соответствующих величин, $A = (0, 0, A_3)$). В этом случае последнее уравнение (1.3) выполняется автоматически, а остальные уравнения (1.3) с учетом (1.1) дают

$$\nabla^2 A_3 = i\omega D_3, \quad i\omega\mu A_3 + h_{31} \operatorname{div} U - \beta_{33}^s = C \tag{1.5}$$

Здесь U — амплитудное значение вектора перемещения, C — константа, которая в дальнейшем в соответствии с условиями излучения полагается равной нулю.

Из (1.5) получаем уравнение для векторного потенциала

$$\nabla^2 A_3 + k^2 A_3 = \frac{i\omega h_{31}}{\beta_{33}^s} \operatorname{div} U, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \left(\frac{\beta_{33}^s}{\mu}\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

Величина c, имеющая смысл скорости распространения света в пьезосреде, существенно больше скорости распространения механических возбуждений. Например, для пьезокерамики *PZT*-4 $c \approx 1{,}2 \times 10^7$ м/с. Поэтому в дальнейшем, предполагая, что длина разреза много меньше электромагнитной волны, член $\omega^2 A_3 / c^2$ опускаем. В этом случае из (1.5), (1.6) находим

$$D_3 = \frac{h_{31}}{\beta_{33}^s} \operatorname{div} U \tag{1.7}$$

Подставляя в уравнения движения (1.2) выражения для σ_{ij} из (1.1) и учитывая (1.7) и соотношения Коши, приходим к уравнению относительно амплитуды вектора перемещений

$$\nabla^2 U + \varepsilon \operatorname{grad} \operatorname{div} U + \gamma_2^2 U = 0 \tag{1.8}$$

$$\varepsilon = \frac{c_{11}^* + c_{12}^*}{c_{11}^* - c_{12}^*} = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} - 1, \quad c_{11}^* = c_{11}^E - \varepsilon_{?}^{?}$$

$$c_{12}^* = c_{12}^D - \varkappa_0^2, \quad \gamma_i = \frac{\omega}{c_i} \quad (i = 1,2)$$

$$c_1 = \left(\frac{c_{11}^*}{\rho}\right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{c_{11}^* - c_{12}^*}{2\rho}\right)^{1/2}, \quad \varkappa_0^2 = \frac{h_{31}^2}{\beta_{33}^s}$$

Здесь $\gamma_i (i = 1,2)$ — волновые числа, c_i — скорости распространения соответствующих механических волн, величина $\varkappa_0^2$ характеризует пьезоэлектрический эффект.

Таким образом, задача об определении механических перемещений сводится к интегрированию уравнений Ламе для некоторой фиктивной изотропной среды с параметрами c_{11}^*, c_{12}^* при обычных краевых условиях на берегах разрезов по напряжениям.

При возбуждении плоских волн в неограниченном пьезоэлектрике класса 6mm сдвиговая механическая волна не вызывает сопряженной электромагнитной волны. Однако, чистой волны расширения и чистой электромагнитной волны, вообще говоря, не существует.

Дисперсионное уравнение, соответствующее монохроматической волне, движущейся под углом β к оси x_1: $u_k = U_k \exp[-i(\omega t + \lambda x \times n)]$ $(k = 1,2)$, $a_3 = A_3 \exp[-i(\omega t + \lambda x \cdot n)]$, $x = (x_1, x_2)$, $n = (\cos\beta, \sin\beta)$ имеет вид

$$(\lambda^2 - \beta_1^2)(\lambda^2 - \beta_2^2)(\lambda^2 - \gamma_2^2) = 0 \tag{1.9}$$

$$2\beta_{1,2} = \sqrt{(\gamma_1 + k)^2 + \delta_0^2} \pm \sqrt{(\gamma_1 - k)^2 + \delta_0^2}, \quad \delta_0^2 = \frac{\varkappa_0^2 k^2}{c_{11}^D - \varkappa_0^2}$$

Соответственно получаем связь между амплитудами U_k, A_3: при $\lambda = \beta_1$

$$U_1 = C_1 A_3 \cos\beta, \quad U_2 = C_1 A_3 \sin\beta \tag{1.10}$$

$$C_1 = \frac{k^2 h_{31} \beta_1}{\omega(\gamma_1^2 - \beta_1^2)(c_{11}^D - \varkappa_0^2)}$$

при $\lambda = \beta_2$

$$U_1 = C_2 A_3 \cos\beta, \quad U_2 = C_2 A_3 \sin\beta \tag{1.11}$$

$$C_2 = \frac{k^2 h_{31} \beta_2}{\omega(\gamma_1^2 - \beta_2^2)(c_{11}^D - \varkappa_0^2)}$$

Так как $k \ll \gamma_1$, заключаем из (1.9) $\beta_1 = \gamma_1 + O(k^2)$, $\beta_2 = k + O(k^2)$. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении механических волновых полей в пьезоэлектрике будем считать, что из бесконечности падает P или SV волна. Родственная задача для неограниченной среды с криволинейными разрезами рассматривалась в [3].

Ниже указывается процедура, позволяющая последовательно уменьшать связность области, что дает возможность исследовать взаимодействие нескольких разрезов в среде.

2. Сведение краевой задачи к интегральным уравнениям. Привлекая представления решений [3] для изотропной среды, приходим к системе интегральных уравнений для пьезоэлектрической среды с разрезами

$$\sum_{m=1}^{2} \int_{L} [R'_m(\zeta) G_{mn}(\zeta, \zeta_0) + R_m(\zeta) g_{mn}(\zeta, \zeta_0)] ds = N_n(\zeta_0) \quad (n = 1,2)$$

$$G_{mm} = \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0} + \frac{\pi i}{2} F_{11} \sin(\psi_0 - \alpha_0) +$$

$$+ \frac{(-1)^m \pi \gamma_2^2}{8} \Phi_{11} h_{3m} \left(3 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} - 2 \bar{h}_{1m}^2 \right) \tag{2.1}$$

$$G_{mn} = \frac{(-1)^m i h_{3n}(1 + h_{1m}^2)}{2r} - \frac{(-1)^m \pi}{4} h_{3m} \times$$

$$\times \left[F_{31} + F_{33} h_{1m}^2 - \frac{\gamma_2^2}{2} \left(3 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \right) \Phi_{11} \right] (m \neq n)$$

$$g_{mm} = \frac{\pi i \gamma_2^2 h_{1m}}{16 h_{2m}} \left\{ 2\gamma_2^2 \Phi_{00} - \left(1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \right) \Phi_{20} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \right) \Phi_{22} h_{2m}^2 - \frac{2\bar{h}_{1m}^2 h_{2m}^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} [(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\Phi_{20} - 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 \Phi_{00}] \right\}$$

$$g_{mn} = \frac{\pi i \gamma_2^2 h_{3m}}{16 h_{2m}} \left[\left(1 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \right) \Phi_{22} h_{2m}^2 - 2\Phi_{22} h_{1m}^2 - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \right) \Phi_{20} + 2\gamma_2^2 \Phi_{00} \right] (m \neq n)$$

$$\Phi_{mn} = \frac{\gamma_2^m H_n^{(1)}(\gamma_2 r) - \gamma_1^m H_n^{(1)}(\gamma_1 r)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, \quad F_{3n} = \Phi_{3n} + \frac{2i}{\pi r}$$

$$h_{11} = \bar{h}_{12} = \exp[i(\psi_0 - \alpha_0)], \quad h_{21} = \bar{h}_{22} = \exp[i(\psi - \alpha_0)]$$

$$h_{32} = \bar{h}_{31} = \exp[i(\psi_0 + \alpha_0)]$$

$$R'_m = \frac{dR_m}{ds}, \quad R_m = \Delta U_1 - (-1)^m i \Delta U_2, \quad r = |\zeta - \zeta_0|$$

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2, \quad \zeta_0 = \xi_{10} + i\xi_{20}, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta - \zeta_0), \quad \psi = \psi(\zeta)$$

$$\psi_0 = \psi_0(\zeta_0), \quad \zeta, \zeta_0 \in L = \bigcup_{j=1}^{k} L_j; \quad N_n = N_{n0} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} N_{nk}^{(j)}$$

$$N_{n0} = \frac{2\pi\gamma_1^2}{(c'_{11} - c'_{12})(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} [P_1 - (-1)^n i P_2]$$

$$N_{nk}^{(j)} = \frac{\pi i \gamma_2^2 a_j}{\gamma_1} \exp[(-1)^n i\psi_0 - i\gamma_1 \xi_{k0}] \left\{ \exp[(-1)^{n+1} 2i\psi_0] - \frac{(-1)^k \gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \right|$$

$$N_{nk}^{(1)} = \frac{(-1)^n \pi \gamma_2^2 \tau_k}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \exp[(-1)^n i\psi_0 - i\gamma_n \xi_{k0}]$$

Здесь ΔU_m $(m=1,2)$ представляют скачки перемещений U_m на L; ψ, ψ_0 — угол между нормалью к левому берегу разреза и осью ox_1, ds — элемент дуги L, σ_k и τ_k — амплитуды вектора механических смещений при наличии P и SV волн соответственно, падающих в направлении оси x_k.

К системе (2.1) необходимо присоединить дополнительные условия, выражающие отсутствие разрывов перемещений на концах разрезов

$$\int_{L_j} dR_m = 0, \quad m = 1,2; \quad j = 1,2,\dots,k \tag{2.2}$$

3. Динамические коэффициенты интенсивности напряжений. Система интегральных уравнений (2.1) в совокупности с условиями (2.2) имеет единственное решение в классе функций, неограниченных на концах L_j. Полагая $\zeta = \zeta(\delta)$ $(-1 \leqslant \delta \leqslant 1)$, представим искомые плотности следующим образом:

$$R_m' = \frac{dR_m}{ds} = \frac{\Omega_m(\delta)}{s'(\delta)\sqrt{1-\delta^2}}, \qquad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta} > 0 \tag{3.1}$$

$$\Omega_m(\delta) \in H[-1,1], \quad m = 1,2$$

Асимптотический анализ интегральных представлений для напряжений [3] на продолжении за вершины разрезов L_j позволяет получить динамические коэффициенты интенсивности напряжений в виде

$$K_I = \Lambda\sqrt{\pi l}\,|N|\cos(\omega t - \arg N), \quad K_{II} = \Lambda\sqrt{\pi l}\,|T|\cos(\omega t - \arg T) \tag{3.2}$$

$$N = \mp \frac{\gamma_1^2(c_{11}^0 + c_{12}^0 - 2\nu_0^2)}{4\gamma_2^2\Lambda\sqrt{ls'(\mp 1)}}\left[e^{-i\psi(\mp 1)}\Omega_1(\mp 1) + e^{i\psi(\mp 1)}\Omega_2(\mp 1)\right]$$

$$T = \mp i\frac{\gamma_1^2(c_{11}^0 + c_{12}^0 - 2\nu_0^2)}{4\gamma_2^2\Lambda\sqrt{ls'(\mp 1)}}\left[e^{-i\psi(\mp 1)}\Omega_1(\mp 1) - e^{i\psi(\mp 1)}\Omega_2(\mp 1)\right]$$

$$s'(\mp 1) = \left.\frac{ds}{d\delta}\right|_{\delta=\mp 1}$$

Здесь, при наличии падающей волны имеем $\Lambda = s_{ij}^{max}$ (s_{ij}^{max} — амплитуда напряжений в этой волне); если волны нет, то $\Lambda = P$ (P — интенсивность действующей на разрезе нагрузки). Верхний знак соответствует началу трещины $c = a$, нижний — концу $c = b$, $2l$ — длина разреза.

4. Две трещины в пьезоэлектрической среде. Для исследования взаимодействия двух разрезов в среде необходимо рассмотреть систему из восьми (вещественных) интегральных уравнений. Чтобы избежать этого, поступим следующим образом. Введем параметризацию разрезов $\zeta = \zeta(\delta) \in L_1$, $\eta = \eta(\Delta) \in L_2$, $-1 \leqslant \delta, \Delta \leqslant 1$. Соответственно систему (2.1) с учетом (2.2) сводим к линейным алгебраическим уравнениям относительно значений функций $\Omega_k(\delta)$ и $\Lambda_k(\Delta)$ в узлах интерполяции согласно процедуре работы [7].

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_{m\nu}\Omega_{1\nu} + \beta_{m\nu}\Omega_{2\nu}) = N_m + \sum_{\nu=1}^{n} (\gamma_{m\nu}\Lambda_{1\nu} + \omega_{m\nu}\Lambda_{2\nu}) \tag{4.1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\gamma^*_{m\nu}\Lambda_{1\nu} + \omega^*_{m\nu}\Lambda_{2\nu}) = N^*_m + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha^*_{m\nu}\Omega_{1\nu} + \beta^*_{m\nu}\Omega_{2\nu})$$

$$m = 1, 2, \ldots, 2n$$

$$N_m = N_m(\delta_{2i}), \quad N^*_m = N^*_m(\Delta_{2i}), \quad \alpha_{m\nu} = \alpha_{m\nu}(\delta_{1\nu}, \delta_{2i}), \quad \beta_{m\nu} = \beta_{m\nu}(\delta_{1\nu}, \delta_{2i})$$

$$\gamma_{m\nu} = \gamma_{m\nu}(\Delta_{1\nu}, \delta_{2i}), \quad \omega_{m\nu} = \omega_{m\nu}(\Delta_{1\nu}, \delta_{2i}), \gamma^*_{m\nu} = \gamma^*_{m\nu}(\Delta_{1\nu}, \Delta_{2i}), \quad \omega^*_{m\nu} = \omega^*_{m\nu}(\Delta_{1\nu}, \Delta_{2i})$$

$$\alpha^*_{m\nu} = \alpha^*_{m\nu}(\delta_{1\nu}, \Delta_{2i}), \quad \beta^*_{m\nu} = \beta^*_{m\nu}(\delta_{1\nu}, \Delta_{2i})$$

$$i = i(m) = 1, 2, \ldots, n-1; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{dR_k}{d\delta} = \frac{\Omega_k(\delta)}{\sqrt{1-\delta^2}}, \quad \frac{dR_k}{d\Delta} = \frac{\Lambda_k(\Delta)}{\sqrt{1-\Delta^2}}, \quad k = 1, 2$$

Здесь $\delta_{k\nu}$, $\Delta_{k\nu}$ — нули многочлена Чебышева k-го рода; $\alpha_{m\nu}$, $\beta_{m\nu}$, …, $\omega^*_{m\nu}$ — значения соответствующих линейных комбинаций ядер и правых частей системы (2.1) в узлах интерполяции. n — число узлов разбиения [7].

Определим стандартные решения первой системы уравнений и (3.1) N^0_m, $\gamma^0_{m\nu}$ и $\omega^0_{m\nu}$ так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\Omega_{km} = N^0_{m+l} + \sum_{\nu=1}^{n} (\gamma^0_{m+l,\nu}\Lambda_{1\nu} + \omega^0_{m+l,\nu}\Lambda_{2\nu}) \tag{4.2}$$

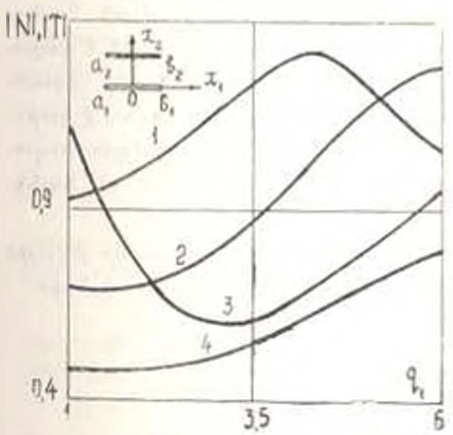
$$l = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ n, & k = 2 \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots, n$$

Далее, исключая с помощью (4.2) соответствующую часть неизвестных в (4.1), приходим к системе уравнений относительно второй группы неизвестных Λ_{km} ($m = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2$). Фактически такой алгоритм сводится к последовательному решению двух несвязанных систем (каждая — из четырех вещественных интегральных уравнений).

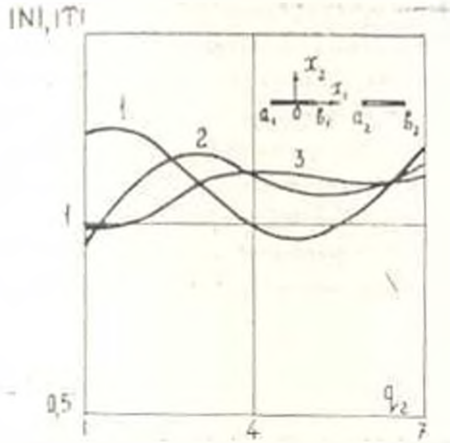
Как показывают численые исследования на ЭВМ, указанная процедура уменьшения связности области является эффективной и может быть обобщена на случай, когда в области имеется несколько разрезов.

В качестве примера исследуем взаимодействие двух прямолинейных трещин $\xi_1^{(1)} = p\delta$, $\xi_2^{(1)} = p_1$, $\xi_1^{(2)} = p_2 + p\Delta$, $\xi_2^{(2)} = p_3$, $-1 \leqslant \delta, \Delta \leqslant 1$ в пьезокерамике $PZT-4$ [5]; a_j и b_j – соответственно, начало и конец разреза L_j ($j = 1,2$).

На фиг. 1 приведены результаты расчетов амплитуд относительных коэффициентов интенсивности напряжений $|N|$ (кривые 2 – 4) и $|T|$ (кривая 1), определяемых формулами (3.2) в зависимости от па-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

раметра $q_1 = p_2 / l$ при $\gamma_1 l = 0{,}5$, $p = 1$, $p_1 = p_3 = 0$. Кривые 2 и 1 построены для случаев, когда на берегах L_1 и L_2 задана нормальная $P_1^+ = -P_1^- = P_1 = P\cos\varphi$, $P_2^+ = -P_2^- = P_2 = P\sin\varphi$ и касательная $P_1 = -P\sin\varphi$, $P_2 = P\cos\varphi$ нагрузки соответственно (при отсутствии падающей волны); кривые 3 и 4 характеризуют действие P волны, падающей из бесконечности вдоль осей x_2 и x_1 соответственно (кривая 3 относится к L_1, кривая 4 – к вершине a_j разреза L_j, $j = 1,2$).

Фиг. 2 иллюстрирует изменение $|N|$ (кривые 2,3) и $|T|$ (кривая 1) в зависимости от параметра $q_2 = p_3 / l - 2$ при $p = 1$, $p_1 = p_2 = 0$, $\gamma_1 l = 0{,}5$. Кривые 2 и 1 комментируются так же, как на фиг. 1 и относятся к вершинам a_1, b_2; кривая 3 соответствует вершинам a_2, b_1 при действии на берегах L_1, L_2 нормальной нагрузки.

DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY FOR PIEZOELECTRIC MEDIUM WITH TUNNEL CRACKS

V. Z. PARTON, M. L. FILSHTINSKI

ԹՈՒՆԵԼԱՅԻՆ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐ

Վ. Զ. ՊԱՐՏՈՆ, Մ. Լ. ՖԻԼՇՏԻՆՍԿԻ

Ամփոփում

Հարթ դեֆորմացիայի պայմաններում ուսումնասիրված է անսահմանափակ պիեզոէլեկտրական միջավայրում ճաքերի փոխազդեցության համար դինամիկական խնդիր: Համապատասխան եզրային խնդիրը բերված է կտրվածքների վրա տեղափոխությունների թռիչքների ամպլիտուդների նկատմամբ ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի: Բերված է կտրվածքների գագաթների շրջակայքում մեխանիկական դաշտի ասիմպտոտիկական վերլուծությունը: Ինտենսիվության գործակիցները ստացված են ֆունկցիոնալների տեսքով:

Առաջարկված է ինտեգրալ հավասարումների լուծման մոտավոր թվային եղանակ այն դեպքերի համար, երբ մարմնում կան մի քանի կտրվածքներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения.— М.: Наука, 1974. 416 с.
2. *Sih G. C., Loeber J. F.* Wave propagation in an elastic solid. — Quart. Appl. Math. 1969. V. 27. № 2. P. 193—213.
3. *Фильштинский Л. А., Волкова Л. В.* Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (плоская деформация).— Докл. АН СССР. 1983. т. 271, №4, с. 831—834.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости.— М.: Наука, 1981. 688 с.
5. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Физическая акустика.— Под ред. Мезона У.-М.: Мир. 1968. Ч. А. 592 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982. 624 с.
7. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.— М.: Наука, 1985. 255 с.

Сумский филиал Харьковского политехнического института

Поступила в редакцию 19.IV.1988.