ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 5, 1989 Механика

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ МАГНИТОУПРУГОСТИ ПРОВОДЯЩИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В НЕОДНОРОДНОМ И НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

САРКИСЯН С. О.

К развитию асимптотических свойств величин, определяющих начально-краевую задачу магнитоупругости [1], как в области тонкой оболочки, так и в среде, окружающей оболочку, и на основании этих результатов созданию асимптотически обоснованной в целом двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек посвящены исследования [2—5].

В данной работе изучаются аналогичные проблемы, когда заданное магнитное поле неоднородно вдоль продольных координат срединной поверхности оболочки и переменной по времени.

1. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное, упругое, проводящее тело и отнесем к триортогональной неподвижной системе координат [6].

Пусть оболочка находится во внешнем неоднородном по координатам α_i, $i=1,2$, постоянном по α_3 (поперечное к срединной поверхности) и переменное по времени магнитном поле $\vec{B}_0=(B_{01}, B_{02}, B_{03})$.

Будем считать, что оболочка находится в среде, электродинамические свойства которой отождествляются со свойствами вакуума: $\sigma=0$, $\rho_e=0$, $\mu=\varepsilon=1$ (принимается абсолютная гауссовая система единиц), где σ — электропроводность, ρ_e — объемная плотность электрического зарядка, ε — диэлектрическая постоянная, μ — коэффициент магнитной проницаемости. Кроме того, принимается, что для материала оболочки выполняются условия $\mu=\varepsilon=1$.

Будем исходить из основных уравнений линейной теории магнитоупругости для трехмерной среды [1]. Эти уравнения в выбранной триортогональной системе координат составляют три группы уравнений и имеют вид:

первая группа уравнений—дифференциальные уравнения теории упругости изотропного тела, которые можно записать так:

—векторное уравнение движения оболочки с учетом массовых сил электромагнитного происхождения:

$$\frac{\partial H_2\vec{\sigma}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial H_1\vec{\sigma}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial(H_1H_2\vec{\sigma}_3)}{\partial\alpha_3}+H_1H_2\left(-\rho\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}+\vec{F}\right)=0 \qquad (1.1)$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B}_0, \quad \vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \times \vec{B}_0\right) \tag{1.2}$$

где $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор перемещения точек оболочки, $\vec{\sigma}_k$ — вектор упругих напряжений, $\vec{E}$ — вектор напряженности возбужденного в оболочке электрического поля. H_i, $i = 1{,}2$ — коэффициенты Ламе.

К векторному уравнению (1.1) следует присоединить соотношения, выражающие зависимость «деформации-смещения» и обобщенного закона Гука [6].

Вторая группа уравнений—уравнения электродинамики в области движущейся оболочки

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot}\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad (\mathrm{I}), \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad (\mathrm{II}) \\
\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad (\mathrm{III}), \quad \operatorname{div}\vec{h} = 0, \quad (\mathrm{IV})
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\vec{h}$ — вектор напряженности возбужденного в оболочке магнитного поля.

Третья группа уравнений—уравнения электродинамики во внешней области

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t} \\
\operatorname{div}\vec{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{E}^{(e)} = 0
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\vec{E}^{(e)}$ и $\vec{h}^{(e)}$ — соответственно векторы индуцированных электрических и магнитных полей в области, окружающей оболочку.

К системе уравнений (1.1)—(1.4), определяющих поведение движущейся упругой оболочки в заданном магнитном поле, должны быть присоединены граничные условия на поверхности оболочки, начальные условия и условия на бесконечности [1, 2].

Для решения поставленной начально-краевой задачи здесь излагается асимптотический метод интегрирования всех трех групп уравнений трехмерной магнитоупругости для тонких оболочек [2, 3].

2. Займемся построением в целом (в области оболочки и в окружающем пространстве) основного итерационного процесса. Основным итерационным процессом определяется такое магнитоупругое состояние, которое проникнуто в глубь как оболочки, так и в окружающее оболочку пространство.

Введем новые независимые переменные и время, положив [2, 3, 6]

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \lambda^{-l(\omega-1)}\frac{R}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2.1}$$

где R — некоторый характерный радиус кривизны срединной поверхности, p, l — целые числа, $l > p \geqslant 0$; λ — большой постоянный параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$.

В дальнейшем считается, что при дифференцировании по ξ_1, ξ_2 и ζ искомые величины не меняют своего порядка, то есть магнитоупругое состояние имеет показатель изменяемости $\frac{p}{l}$.

Величина ω характеризует изменяемость магнитоупругого процесса во времени.

Введем безразмерные величины по формулам [2, 3]

$$\bar{v}_k = \frac{v_k}{h}, \quad \frac{\tau_k}{E} = \bar{\tau}_k, \quad \frac{\tau_{ij}}{E} = \bar{\tau}_{ij}, \quad \frac{\tau_{i3}}{E} = \bar{\tau}_{i3}$$

$$\frac{B_{0k}}{\sqrt{E}} = \bar{B}_{0k}, \quad \frac{h_k}{\sqrt{E}} = \bar{h}_k, \quad \frac{c}{c_0}\frac{E_k}{\sqrt{E}} = \bar{E}_k \tag{2.2}$$

$$\frac{c}{c_0}\frac{h\rho_e}{\sqrt{E}} = \bar{\rho}, \quad R_m = \frac{\sigma h}{c} \cdot \frac{c_0}{c}, \quad \bar{q}_k^{\pm} = \frac{q_k^{\pm}}{E}$$

где τ_k, τ_{ij}, τ_{i3} — компоненты несимметричного тензора напряжений [6]

Сделаем также следующие замены величин:

$$\bar{v}_i = \lambda^{\varkappa+l-p}\overset{*}{v}_i, \quad \bar{v}_3 = \lambda^{\varkappa+l-c}\overset{*}{v}_3,$$

$$\bar{\tau}_i = \lambda^{\varkappa} \cdot \overset{*}{\tau}_i, \quad \bar{\tau}_{ij} = \lambda^{\varkappa} \cdot \overset{*}{\tau}_{ij}, \quad \bar{\tau}_{i3} = \lambda^{\varkappa+p-l} \cdot \overset{*}{\tau}_{i3}, \quad \bar{\tau}_3 = \lambda^{\varkappa-l+c} \cdot \overset{*}{\tau}_3,$$

$$\bar{q}_i^{\pm} = \lambda^{\varkappa\pm p-l}\overset{*}{q}_i^{\pm}, \quad \bar{q}_3^{\pm} = \lambda^{\varkappa+c-l}\overset{*}{q}_3^{\pm}, \tag{2.3}$$

$$\bar{B}_{0k} = \lambda^{\varkappa_1} \cdot \overset{*}{B}_{0k}, \quad \bar{h}_k = \lambda^{\varkappa_1} \cdot \overset{*}{h}_k, \quad \bar{E}_k = \lambda^{\varkappa_2} \cdot \overset{*}{E}_k, \quad \bar{\rho} = \lambda^{\varkappa_2} \cdot \overset{*}{\rho}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Числа $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и ω выбираются таким образом, чтобы в исходном приближении асимптотического метода получались непротиворечащие уравнения взаимосвязанных электромагнитоупругих явлений и, чтобы инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения.

Таким образом, получаются

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa_1 = l\left(\frac{1}{2}\omega - 1\right), \quad \varkappa_2 = \frac{3}{2}l\omega - 2l - p \tag{2.4}$$

при этом, в случае $2p \leqslant l$ $\omega = 1$, $c = 0$; а в случае $2p \geqslant l$ $\omega = \frac{2p}{l}$, $c = 2c - l$.

Отметим, что (2.4) одновременно определяет интенсивность (2.3) внешнего магнитного поля, при котором имеет место взаимодействие между упругими перемещениями и электромагнитным полем.

Следуя асимптотическому методу, наша цель будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ и времени τ) уравнения (1.1) и (1.4) к двумерным (с независимыми переменными ξ_1 и ξ_2 и времени τ) уравнениям. Для этого, во-первых, необходимо избавиться в (1.1)—(1.5) от дифференцирования по ζ, а во-вторых, в коэффициентах, получаемых таким образом уравнений, должен быть выделен характер их зависимости от ζ и асимптотический порядок по большому параметру λ.

Следует отметить, что переход от точных трехмерных уравнений магнитоупругости к приближенным двумерным уравнениям сужает область изменяемости и по координатам и по времени функций, определяющих задачу. Главным критерием к построенной таким образом двумерной теории является требование малой интенсивности изменения функции по отношению к толщине оболочки, плавности их изменения по продольным координатам и низкочастотность изучаемого динамического явления. Для электродинамических процессов характерно явление скин-эффекта (сложное распределение электромагнитного поля по толщине тела). Ограничиваясь изучением низкочастотными динамическими процессами, этим самым исключается проявление скин-эффекта, так как в тонких проводниках скин-эффект проявляется при весьма больших частотах [7].

Ограничимся рассмотрением системы уравнений, получаемых на основе первого приближения (следующий этап от исходного приближения) основного итерационного процесса, для этого в выкладках необходимо удерживать члены до величин порядка $O(\lambda^{-2l+2p})$. На этом уровне получается двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек.

Пропуская весьма сложные и громоздкие преобразования, для величин со звездочками с точностью $O(\lambda^{-2l+2p})$ будем иметь:

$$\overset{\bullet}{v}_i = \overset{\circ}{v}_i + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\overset{1}{v}_i, \quad \overset{\bullet}{v}_3 = \overset{\circ}{v}_3 + \lambda^{-l+c}\zeta\overset{1}{v}_3$$

$$\overset{\bullet}{e}_i = \overset{\circ}{e}_i + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\overset{1}{e}_i, \quad \overset{\bullet}{m}_i = \overset{\circ}{m}_i + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\overset{1}{m}_i$$

$$\overset{\bullet}{\tau}_i = \overset{\circ}{\tau}_i + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\overset{1}{\tau}_i, \quad \overset{\bullet}{\tau}_{ij} = \overset{\circ}{\tau}_{ij} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\overset{1}{\tau}_{ij} \tag{2.5}$$

$$\overset{\bullet}{\tau}_{i3} = \overset{\circ}{\tau}_{i3} + \zeta\overset{1}{\tau}_{i3} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\overset{2}{\tau}_{i3} + \lambda^{2l\omega-4l-p-c}\zeta^3\overset{3}{\tau}_{i3}$$

$$\overset{\bullet}{\tau}_3 = \overset{\circ}{\tau}_3 + \zeta\overset{1}{\tau}_3 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\overset{2}{\tau}_3 + \lambda^{-2l+4p-2c}\zeta^3\overset{3}{\tau}_3$$

$$\overset{\bullet}{E}_i = \overset{\circ}{E}_i + \lambda^{p-l}\zeta\overset{1}{E}_i + \lambda^{p-l}\zeta^2\overset{2}{E}_i$$

$$\overset{\bullet}{h}_i = \lambda^{p-l}\overset{0}{h}_i + \zeta\overset{1}{h}_i + \lambda^{p-l}\zeta\overset{1}{h}{}^{\bullet}_i + \lambda^{p-l}\zeta^2\overset{2}{h}_i + \lambda^{p-l}\zeta^3\overset{3}{h}_i \tag{2.6}$$

$$4\pi R_m\overset{\bullet}{E}_3 = 4\pi R_m\overset{\circ}{E}_3 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\overset{1}{E}_3, \quad \overset{\bullet}{h}_3 = \overset{\circ}{h}_3 + \lambda^{p-l}\zeta\overset{1}{h}_3 + \lambda^{p-l}\zeta^2\overset{2}{h}_3$$

Формулами (2.5) и (2.6) определяются все величины, как механические, так и электродинамические в области оболочки.

Выражения, определяющие $\overset{1}{v}_i, \overset{1}{v}_3, \overset{1}{e}_i, \overset{1}{m}_i, \overset{1}{\tau}_i, \overset{1}{\tau}_{ij}, \overset{2}{\tau}_{i3}, \ldots,$ из-за громоздкости не приводятся.

Введем теперь в рассмотрение уравнения электродинамики во внешней от оболочки области (вакууме), то есть уравнения (1.4). Во внешней области должен быть построен основной итерационный процесс, определяющий такое электромагнитное состояние, которое охватывает всю внешнюю область. Рассматривая уравнения (1.4), легко убедиться, что эти уравнения имеют эллиптический тип. Тогда для основного итерационного процесса во внешней от оболочки области мы вправе считать [8], что электромагнитное поле в трех направлениях имеет одну и ту же изменяемость, которая равна изменяемости по направлениям α_1 и α_2 для внутренней задачи (в области оболочки). По времени для внешней задачи принимается такая же изменяемость, что и для внутренней задачи.

Итак, во внешней среде введем безразмерную систему координат и время, соответственно [2, 3]

$$\alpha_1 = R\lambda^{-p}\xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-p}\zeta_1, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \tag{2.7}$$

где t_0 определяется из (2.1) с учетом (2.4).

Введем также безразмерные величины для компонент электромагнитного поля во внешней от оболочки области, используя формулы (2.2), и сделаем следующие замены искомых величин:

$$\overline{h}_k^{(e)} = \lambda^{\varkappa_1}\overset{*}{h}_k^{(e)}, \quad \overline{E}_k^{(e)} = \lambda^{\varkappa_2}\overset{*}{E}_k^{(e)}, \quad k = 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ определяются из формул (2.4).

Внося (2.7) и (2.8) в исходные уравнения (1.4), легко убедиться, что уравнения относительно $\overset{*}{h}_k^{(e)}$ и $\overset{*}{E}_k^{(e)}$ в новых переменных (2.7) остаются без изменений.

В переменных (2.7) существенно упрощается область интегрирования внешней области. Действительно, в первоначально выбранной размерной системе координат лицевые поверхности оболочки определяются уравнениями $\alpha_3 = \pm h$; в системе координат (2.7) эти поверхности определяются следующим образом: $\zeta_1 = \pm \frac{h}{R} = \pm \varepsilon = \pm \lambda^{-l}$, где ε — малый параметр задачи. Здесь при $\varepsilon \to 0$ имеем $\zeta_1 = \pm 0$. Это означает, что область тонкой оболочки для построения основного итерационного процесса внешней среды необходимо рассматривать в качестве математического разреза.

Используя соответствующие данные из решения внутренней задачи электродинамики, при помощи тензора Грина для уравнений (1.4), решение внутренней и внешней задач электродинамики в целом можно привести к решению определенных систем интегральных уравнений.

При построении тензора Грина для внешних уравнений электродинамики (1.4) полезно использовать следующие свойства уравнений электродинамики [9].

Допустим, что на разрезе терпят разрывы все компоненты электромагнитного поля (компоненты электрического поля и компоненты магнитного поля), тогда тензор Грина этой общей задачи будет представлять из себя сумму тензоров Грина следующих двух задач электродинамики во всем пространстве [9].

I задача

$$\mathrm{rot}\vec{h}^{(e)} = \vec{\delta}(\vec{r}),\ (\mathrm{I}), \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad (\mathrm{II})$$

$$\mathrm{div}\,\vec{h}^{(e)} = 0,\ (\mathrm{III}), \qquad \mathrm{div}\vec{E}^{(e)} = 4\pi\delta(\vec{r}), \quad (\mathrm{IV}) \tag{2.9}$$

II задача

$$\mathrm{rot}\,\vec{h}^{(e)} = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} + \vec{\delta}(\vec{r})$$

$$\mathrm{div}\,\vec{h}^{(e)} = 4\pi\delta(\vec{r}), \quad \mathrm{div}\,\vec{E}^{(e)} = 0 \tag{2.10}$$

На бесконечности должны выполняться условия убывания векторов электромагнитного поля [8], $\delta(\vec{r})$ —дельта-функция Дирака.

Отметим, что с уравнениями теории тонких оболочек с учетом сил электромагнитного происхождения взаимосвязана задача (2.9), а задача (2.10) переходит на второй план, когда необходимо полное определение величин во внешней от оболочки области.

Задачу (2.9) можно привести к более наглядному виду, удобному для построения частного решения, в случае, когда $\mathrm{div}\vec{E}^{(e)} = 0$, которое имеет место в нашем случае.

Из обеих частей (II) векторного уравнения (2.9) возьмем операцию rot, с учетом (III) и (I) уравнений (2.9); получим

$$\Delta\,\vec{E}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\delta}(\vec{r}) \tag{2.11}$$

где Δ—трехмерный векторный оператор Лапласа. Здесь специально не приводится, но имеется ввиду, что дельта-функция содержит множитель, зависящий от времени.

Итак, построение частного решения (2.9) заменяется определением частного решения векторного уравнения (2.11).

В частном случае, в декартовых ортогональных координатах вышеуказанная система распадается на три независимых дифференциальных уравнения $\Delta E_k^{(e)} = \delta(r_0)$, $k = 1, 2, 3$, где Δ—скалярный оператор Лапласа, и совокупность функций Грина для этих отдельных уравнений будет представлять тензор Грина для данной системы. Построение же функции Грина можно осуществить методом интегрального преобразования Фурье [10].

Существуют и другие частные классы задач, при которых векторное уравнение (2.11) распадается на более простые уравнения, частные решения которых можно определить, применяя другие интегральные преобразования [10].

3. На основании асимптотических разложений (2.5) с точностью $O(\lambda^{-2l+2p})$ легко получить уравнения двумерной теории оболочек с учетом сил электромагнитного происхождения:

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(T_1-T_2)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(S_{12}+S_{21})-$$

$$-\frac{N_1}{R_1}-2\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+B_{03}\frac{2\sigma h}{c}\varphi+\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}B_{03}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=X_1$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial S_{21}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(T_2-T_1)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(S_{21}+S_{12})-\frac{N_2}{R_2}-$$

$$-2\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-B_{03}\frac{2\sigma h}{c}\psi-\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}B_{03}\frac{\partial\psi}{\partial t}=X_2$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_1N_1)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1N_2)\right]-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2\sigma h}{c}\times$$

$$\times(B_{02}\cdot\psi-B_{01}\cdot\varphi)-\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}\left(B_{02}\frac{\partial\psi}{\partial t}-B_{01}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+Z=0$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial G_1}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(G_1-G_2)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(H_{12}+H_{21})-N_1-Y_1=0$$

$$(3.1)$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial G_2}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial H_{21}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}(G_2-G_1)\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(H_{21}+H_{12})-N_2-Y_2=0$$

$$\varphi=E_{20}-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t},\quad \psi=E_{10}+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}$$

К уравнениям (3.1) присоединяются соотношения упругости А. Л. Гольденвейзера [6] или другие варианты указанных соотношений [6].

Изучая краевые электромагнитоупругие явления, аналогично [2, 3], легко получить механические приведенные граничные условия [6], которые с большой точностью [6] можно заменить классическими граничными условиями теории оболочек Лява [6]. Что касается начальных условий, то они для механической части задачи формулируются посредством перемещений и соответствующих скоростей точек срединной поверхности оболочки, а для электродинамической части задачи принимаются нулевые начальные условия для компонент индуцированного электромагнитного поля двумерной теории.

При помощи тензора Грина уравнений (2.9) или (2.11) с учетом

(2.6), можно показать, что решение внутренней и внешней задач электродинамики в целом приводятся к решению системы интегродифференциальных уравнений:

$$\psi+2\pi\frac{\sigma h^2}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}=\iint\limits_{\Omega}K_{11}(\alpha_1-\alpha_{10},\alpha_2-\alpha_{20})[h_1]d\Omega+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}K_{12}(\alpha_1-\alpha_{10},\alpha_2-\alpha_{20})[h_2]d\Omega \qquad (3.2)$$

$$\varphi+2\pi\frac{\sigma h^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}=\iint\limits_{\Omega}K_{21}(\alpha_1-\alpha_{10},\alpha_2-\alpha_{20})[h_1]d\Omega+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}K_{22}(\alpha_1-\alpha_{10},\alpha_2-\alpha_{20})[h_2]d\Omega,\quad \alpha_1,\alpha_2\in\Omega$$

где K_{ij} — значения тензора Грина задачи (2.9) или (2.11) при $\alpha_3=0$; в левой части соотношений (3.2) стоят значения E_i на лицевых поверхностях оболочки; Ω — область срединной поверхности упругой оболочки, величины $[h_i]$ определяются из следующих соотношений:

$$[h_1]=h_1^+-h_1^-=2h\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial h_{30}}{\partial\alpha_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right)+\frac{16\pi^3}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (3.3)$$

$$[h_2]=h_2^+-h_2^-=2h\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial h_{30}}{\partial\alpha_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\psi\right)-\frac{16\pi^2}{3}\cdot\frac{\sigma^2h^3}{c^3}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Следует отметить, что если придерживаться условию $\frac{h}{R_i}\ll 1$, то в формулах (3.1)—(3.3) можно пренебречь членами, содержащими множители $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, а также величинами $\frac{1}{A_i}\frac{\partial h_{30}}{\partial\alpha_i}$ в формулах (3.3)

Итак, система уравнений (3.1) и (3.2) с учетом (3.3) представляет систему разрешающих двумерных уравнений магнитоупругости тонких оболочек на уровне моментной теории оболочек. Зная решение этой системы, с помощью соответствующих формул (2.5) и (2.6) определяются как механические, так и электродинамические величины в области оболочки. Величина h_{30} определяется из уравнения

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial E_{20}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}E_{20}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial E_{10}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}E_{10}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_{30}}{\partial t}$$

Электродинамические величины в окружающем оболочку пространстве определяются при помощи интегральных соотношений

$$E_i^{(e)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)=\iint\limits_{\Omega}K_{i1}(\alpha_1-\alpha_{10},\ \alpha_2-\alpha_{20},\alpha_3)[h_1]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}K_{i2}(\alpha_1-\alpha_{10},\alpha_2-\alpha_{20},\alpha_3)[h_2]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2,\quad \alpha_1,\alpha_2\notin\Omega \qquad (3.4)$$

и других подобных.

Считая заданное поле неизменным по времени, из (3.1) — (3.3) получаются уравнения двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек, находящихся в постоянном магнитном поле [2, 3].

Рассматривая уравнение баланса энергии трехмерной магнитоупругости [2, 4], при помощи асимптотических разложений (2.5), (2.6) определяется уравнение баланса энергии двумерной теории магнитоупругости. Оно будет выражаться формулой, приведенной в работе [4], где следует считать величины B_{0k}, $k = 1, 2, 3$, как функции от времени.

CONSTRUCTION OF TWO-DIMENSIONAL ASYMPTOTIC THEORY OF MAGNETOELASTICITY FOR THIN CONDUCTING SHELL PLACING IN A NONUNIFORM AND NON-STATIONARY MAGNETIC FIELD

S. O. SARKISIAN

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԵՎ ԺԱՄԱՆԱԿԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԲԱՐԱԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱԿԱՆ ԵՐԿՉԱՓ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ասիմպտոտիկական անալիզի է ենթարկված մագնիսաառաձգականության եռաչափ տեսության հավասարումների լրիվ համակարգը և ստացված արդյունքների հիման վրա կառուցված է հաղորդիչ բարակ թաղանթի մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսությունը այն դեպքում, երբ թաղանթը գտնվում է անհամասեռ և ժամանակից կախված տվյալ մագնիսական դաշտում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Саркисян С. О.* Магнитоупругость проводящих тонких оболочек и пластин.—Докторская диссертация, Казанский госуниверситет, 1987. 406 с.
3. *Саркисян С. О.* К построению в целом двумерной теории колебаний проводящей тонкой оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1985, т. *38*, №6, с. 21—34.
4. *Саркисян С. О.* Уравнение энергии и теорема единственности в магнитоупругости тонких оболочек.—Уч. записки Ереванского ун-та, естествен. науки, 1985, №2, с. 41—46.
5. *Саркисян С. О.* Теорема взаимности в магнитоупругости тонких оболочек.—

Межвуз. сб. научн. трудов, Механика, 1987, изд. Ереванского ун-та, вып. 6, с. 102—111.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.—М.: Наука, 1976. 512 с.
7. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика.—М.: Высшая школа, 1980 335 с.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.—Успехи матем. наук, 1957, т. *12*, №5, с. 3—122.
9. *Красюк Н. П., Дымович Н. Д.* Электродинамика и распространение радиоволн.—М.: Высшая школа, 1974. 536 с.
10. *Саркисян С. О.* О некоторых задачах колебаний проводящих пластин и оболочек в магнитном поле. В сб.: III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван, Изд. ЕГУ, 1984, с. 142—145.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
17.III.1988