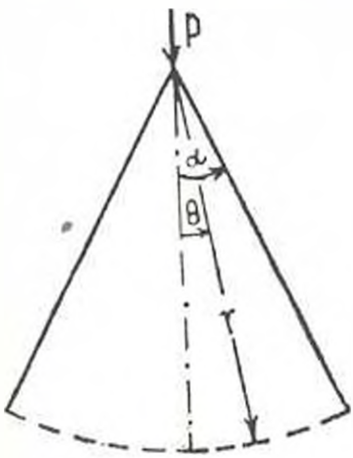
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 4, 1989 Механика

УДК 539.376

СЖАТИЕ И ИЗГИБ НЕОДНОРОДНОГО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ КЛИНА

САФАРЯН Н. Б.

Рассматривается сжатие плоского бесконечного клина, к вершине которого приложена сосредоточенная сила P (фиг. 1). Материал принимается несжимаемым, пластически неоднородным и подчиняется степенному закону упрочнения.



Фиг. 1.

В цилиндрической системе координат r, θ, z, начало которой совпадает с вершиной клина, будем считать, что напряженное состояние не зависит от координаты z. Компоненты напряжения $\tau_{rz}=\tau_{\theta z}=0$, а остальные компоненты напряжения σ_r, σ_θ, σ_z и $\tau_{r\theta}$ — функции только r и θ. Будем искать точное решение этой задачи при предположении, что компоненты напряжения $\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$. Соответствующая однородная задача рассмотрена в работах [1,2].

Краевые условия рассматриваемой задачи следующие:

$$v=0 \quad \text{при} \quad \theta=0, \quad \sigma_\theta=0, \quad \tau_{r\theta}=0 \quad \text{при} \quad \theta=\alpha \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения равновесия сводятся к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r)=0 \tag{2}$$

Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций принимается в виде

$$\tau_0=k(r,\theta)\varepsilon_0^m \tag{3}$$

$$\tau_0=\frac{\sigma_r}{2}, \quad \varepsilon_0=|\varepsilon_r-\varepsilon_\theta|, \quad 0<m\leq 1$$

$k(r,\theta)$ — известная функция, характеризующая пластическую неоднородность материала.

Задача решается полуобратным способом. Исходя из условия несжимаемости $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$, компоненты перемещения можно представить в виде

$$u(r,\theta) = r^{-\lambda-1}\psi'(\theta), \quad v(r,\theta) = \lambda r^{-\lambda-1}\psi(\theta) \tag{4}$$

λ — постоянный неизвестный параметр, $\psi(\theta)$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

Из условия $\gamma_{r\theta} = 0$ имеем

$$\psi''(\theta) - \lambda(\lambda+2)\psi(\theta) = 0 \tag{5}$$

При $\lambda(\lambda+2) > 0$ общее решение уравнения (5) будет

$$\psi(\theta) = c_1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda^2+2\lambda}\,\theta + c_2 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda^2+2\lambda}\,\theta \tag{6}$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные интегрирования. Из условия $\psi(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$.

Принимаем, что неоднородность материала определяется законом

$$k(r,\theta) = k\omega(\theta) \tag{7}$$

где k — известный постоянный параметр, $\omega(\theta)$ — известная четная функция, определяемая из эксперимента.

Из уравнения равновесия (2) следует

$$\sigma_r = \frac{\Phi(\theta)}{r} \tag{8}$$

где $\Phi(\theta)$ — произвольная функция интегрирования.

Исходя из условия степенного упрочнения (3), имеем

$$\frac{\Phi(\theta)}{r} = 2^{m+1}k\left|(\lambda+1)\sqrt{\lambda^2+2\lambda}\right|^m c_1^m\left(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda^2+2\lambda}\,\theta\right)^m\omega(\theta)r^{-m(\lambda+2)} \tag{9}$$

Приравнивая степени r в обеих частях равенства (9), получим $\lambda = (1-2m)/m$.

Окончательный вид компонентов напряжений и перемещений будет

$$\sigma_r = 2^{m+1}k\left|\frac{(1-m)\sqrt{1-2m}}{m^2}\right|^m c_1^m \frac{\left(\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{1-2m}}{m}\theta\right)^m\omega(\theta)}{r}$$

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

$$u(r,\theta) = c_1\frac{\sqrt{1-2m}}{m} r^{\frac{m-1}{m}} \operatorname{ch}\frac{\sqrt{1-2m}}{m}\theta \tag{10}$$

$$v(r,\theta) = c_1\frac{(1-2m)}{m} r^{\frac{m-1}{m}} \operatorname{sh}\frac{\sqrt{1-2m}}{m}\theta, \quad m < \frac{1}{2}$$

Для определения неизвестной постоянной c_1 рассмотрим статическое равновесие, мысленно выделенного из клина сектора с произвольным радиусом r

$$2\int_0^{\alpha}\sigma_r\cos\theta\, r\,d\theta = P \tag{11}$$

Внося сюда значение σ_r из (10), получим

$$c_1=\left(\frac{P}{J}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad J=2^{m+2}k\left|\frac{(1-m)\sqrt{1-2m}}{m^2}\right|^m \times \int_0^{\alpha}\left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{1-2m}}{m}\theta\right)^m \omega(\theta)\cos\theta d\theta$$

Аналогичное решение можно получить при $\lambda(\lambda+2)<0$. Тогда

$$\psi(\theta) = B\sin\sqrt{-\lambda(\lambda+2)}\,\theta \tag{12}$$

где B — произвольная постоянная интегрирования. Формулы напряжений и перемещений будут

$$\sigma_r=2^{m+1}k\left|\frac{(1-m)\sqrt{2m-1}}{m^2}\right|^m B^m\frac{\left(\cos\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\theta\right)^m\omega(\theta)}{r}$$

$$\sigma_\theta=0, \quad \tau_{r\theta}=0$$

$$u(r,\theta)=B\frac{\sqrt{1-2m}}{m}r^{\frac{m-1}{m}}\cos\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\theta \tag{13}$$

$$v(r,\theta)=B\frac{(1-2m)}{m}r^{\frac{m-1}{m}}\sin\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\theta, \quad m>1/2$$

Неизвестное постоянное B определяется из условия (11).

$$B=\left(\frac{P}{I}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad I=2^{m+2}k\left|\frac{(1-m)\sqrt{2m-1}}{m^2}\right|^m\int_0^{\alpha}\left(\cos\frac{\sqrt{2m-1}}{m}\theta\right)^m\omega(\theta)\cos\theta d\theta$$

При $m=1/2$ решение уравнения (5) есть линейная функция

$$\psi(\theta) = D(\theta-\theta_0) \tag{14}$$

Из условия $\psi(0)=0$ следует, что $\theta_0=0$. Для компонентов напряжений и перемещений получаются следующие простые формулы:

$$\sigma_r=2\sqrt{2}D^{1/2}\frac{\omega(\theta)}{r}, \quad \sigma_\theta=0, \quad \tau_{r\theta}=0, \quad u(r,\theta)=\frac{D}{r}, \quad v=0 \tag{15}$$

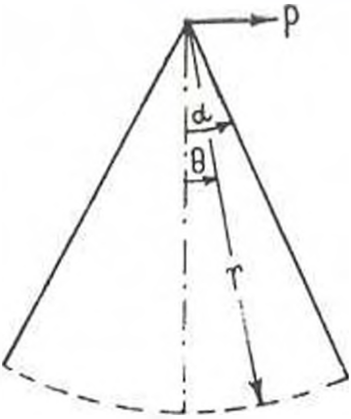
Условие (11) дает

$$D=\left(\frac{P}{G}\right)^2, \qquad G=4\sqrt{2}\int_0^{\alpha}\omega(\theta)\cos\theta d\theta$$

Для несжимаемого материала, как и в однородном случае, получаются замкнутые решения.

Рассмотрим случай, когда клин изгибается сосредоточенной силой, приложенной к вершине перпендикулярно оси (фиг. 2). Определяющие уравнения и принятые допущения совпадают с предыдущим случаем.

Краевые условия в этой антисимметричной задаче следующие:



Фиг. 2

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0; \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha \tag{16}$$

Для этой задачи при $\lambda(\lambda+2) > 0$ из условия $\omega(0) = 0$ следует, что в (6) $c_1 = 0$. Общие формулы напряжений и перемещений имеют вид:

$$\sigma_r = 2^{m+1} k \left| \frac{(1-m)\sqrt{1-2m}}{m^2} \right| c_2^m \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{1-2m}}{m} \theta \right)^m \omega(\theta)}{r}$$

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \tag{17}$$

$$u(r, \theta) = c_2 \frac{\sqrt{1-2m}}{m} r^{\frac{m-1}{m}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{1-2m}}{m} \theta$$

$$v(r, \theta) = c_2 \frac{(1-2m)}{m} r^{\frac{m-1}{m}} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{1-2m}}{m} \theta$$

Неизвестное постоянное c_2 определяется из условия равновесия внешних сил

$$2 \int_0^\alpha \sigma_r \sin\theta \cdot r d\theta = P \tag{18}$$

Подставляя сюда значение σ_r из (17), получим

$$c_2 = \left(\frac{P}{M} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad M = 2^{m+2} k \left| \frac{(1-m)\sqrt{1-2m}}{m^2} \right|^m \int_0^\alpha \left(\operatorname{sh} \frac{\sqrt{1-2m}}{m} \theta \right)^m \omega(\theta) \sin\theta d\theta$$

Аналогичные решения получаются и в случаях $\lambda(\lambda+2) < 0$ и $\lambda = 0$.

COMPRESSING AND BENDING OF NONHOMOGENEOUS STRENGTHENED WEDGE

N. B. SAFARIAN

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՄՐԱՊՆԴՎՈՂ ՍԵՊԻ ՍԵՂՄՈՒՄԸ ԵՎ ԾՌՈՒՄԸ

Ն. Բ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է հարթ անվերջ սեպի սեղմումը և ծռումը գագաթում կիրառված կենտրոնացված ուժի ազդեցության տակ: Սեպի նյութը անհամասեռ է և ենթարկվում է աստիճանային ամրապնդման օրենքին:

Լարումների և տեղափոխությունների համար ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский В. В.* Теория пластичности.— М.: Высш. школа, 1968. 608 с.
2. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.—Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1959, т. 12, вып. 2, с. 77—105.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
20.IX.1988