

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ  
 ПОРИСТОЙ СТЕНКОЙ

БАБАДЖАНИАН Г. А., МНАՃԱԿԱՆԻ Բ. Զ.

Рассматривается течение стационарного ламинарного изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с движущейся пористой стенкой.

Такие течения относятся к мало изученному классу задач и теории движения жидкости и имеют специфические особенности [1], [2], [3], [4]. Эти задачи имеют многочисленные практические приложения в современной технологии.

Скольжение верхней пористой плоскости происходит в своей плоскости по оси  $OX$  с заданной постоянной скоростью  $U$ . За основные уравнения движения жидкости принимаются приближенные линеаризованные уравнения Навье-Стокса с частичным учетом слагаемых от ускорения и вязкости в виде [3]

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Здесь  $U$  — средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы, где распределение скорости принимается равномерным.  $v_x$  и  $v_y$  — соответствующие компоненты скорости по осям  $OX$  и  $OY$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Приняв начало оси  $OY$  на средней линии между плоскостями и расстояние между ними  $2h$ , граничные условия поставленной задачи будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x = U = \text{const}, \quad p = p_H = \text{const} \\ \text{при } y = h, \quad x > 0 \quad v_x = U_1, \quad v_y = k(p - p_a) \\ \text{при } y = -h, \quad x > 0 \quad v_x = 0, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $p_H$  — значение давления в начале трубы,  $k$  — коэффициент проницаемости стенки,  $p_a$  — внешнее давление.

Если  $p > p_a$ , имеет место отсос жидкости, в случае  $p < p_a$  — вдувание.

Введем новые переменные, полагая

$$z = \frac{x}{h}, \quad \xi = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad p = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

Тогда система уравнений (1) и граничные условия (2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (3)$$

$$\text{при } z = 0 \quad u = 0, \quad p = 0$$

$$\text{при } \xi = 1 \quad z > 0 \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v = \alpha(p + b) \quad (4)$$

$$\text{при } \xi = -1 \quad z > 0 \quad u = -1, \quad v = 0$$

где  $\text{Re} = \frac{Uh}{\nu}$  — число Рейнольдса,  $\alpha = k_0 U$ ,  $b = \frac{p_0 - p_1}{\rho U^2}$ .

Систему уравнений (3) при граничных условиях (4) решаем с помощью преобразования Лапласа [5]. Применяя к уравнениям (3) и к граничным условиям (4) преобразования Лапласа, получим

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} - \lambda \bar{u} = \lambda \bar{p}, \quad \frac{d\bar{p}}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\bar{v}}{d\xi} + \lambda \bar{u} = 0 \quad (5)$$

$$\text{при } \xi = 1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = \frac{U_1 - U}{U} \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{v} = \alpha \left( \bar{p} + \frac{b}{\lambda} \right) \quad (6)$$

$$\text{при } \xi = -1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = -\frac{1}{\lambda}, \quad \bar{v} = 0$$

где  $\lambda$  — параметр преобразования.

Из системы уравнений (5) для  $\bar{v}$  получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 \bar{v}}{d\xi^4} - \lambda \text{Re} \frac{d^2 \bar{v}}{d\xi^2} = 0 \quad (7)$$

Решение уравнения (7) с учетом граничных условий (6) будет

$$\bar{v} = \frac{\alpha}{2} \left( \bar{p} + \frac{b}{\lambda} \right) \left( \frac{\text{sh} \beta \xi - \beta \text{ch} \beta}{\text{sh} \beta - \beta \text{ch} \beta} + 1 \right) + \frac{a + 1}{2} \left( \xi - \frac{\text{sh} \xi - \xi \text{ch} \xi}{\text{sh} \xi - \xi \text{ch} \xi} \right) + \frac{a - 1}{2} \frac{\text{ch} \xi - \text{ch} \beta}{\beta \text{sh} \beta} \quad (8)$$

Из системы уравнений (5) для  $\bar{u}$  и  $\bar{p}$  соответственно получим

$$\bar{u} = \frac{\alpha}{2} \left( \bar{p} + \frac{b}{\lambda} \right) \frac{\beta (\text{ch} \beta - \text{ch} \xi)}{\lambda (\text{sh} \beta - \beta \text{ch} \beta)} + \frac{a + 1}{2} \left| \frac{\beta (\text{ch} \xi - \text{ch} \beta)}{\text{sh} \xi - \xi \text{ch} \xi} - 1 \right| - \frac{a - 1}{2} \frac{\text{sh} \xi}{\lambda \text{sh} \beta} \quad (9)$$

$$\bar{p} = \frac{\lambda(a+1)\text{th}\beta - b\lambda\beta}{\lambda[\beta\lambda + 2\lambda(\text{th}\beta - \beta)]} \quad (10)$$

где  $\beta = \sqrt{\lambda \text{Re}}$ ,  $a = \frac{U - U_1}{U}$ .

Совершив обратное преобразование Лапласа и переходя к старым переменным для  $v_1$ ,  $v_2$  и  $p$ , окончательно получим

$$v_x = U \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left( \frac{\cos \gamma_m y h}{\cos \gamma_m} - 1 \right) \exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\text{Re}h} x\right) + U_1 B \left( \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_1} \text{Re} y / h}{\text{ch} \sqrt{\lambda_1} \text{Re}} - 1 \right) \times \\ \times \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n \pi y h}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}h} x\right) + \frac{U_1}{2} \left( \frac{y}{h} + 1 \right) \quad (11)$$

$$v_2 = \frac{U}{\text{Re}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_m \left( \frac{\sin \gamma_m y h}{\gamma_m \cos \gamma_m} - \frac{y}{h} + \frac{\beta_1}{\gamma_m^2} \right) \exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\text{Re}h} x\right) - \\ - U_1 B \left( \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_1} \text{Re} y / h}{\sqrt{\lambda_1} \text{Re} \text{ch} \sqrt{\lambda_1} \text{Re}} - \frac{y}{h} - \frac{a}{2\lambda_1} \right) \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) - \\ - \frac{U_1}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cos n \pi y h - 1| \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}h} x\right) \quad (12)$$

$$p = p_n + \rho U^2 B \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \rho U^2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{\text{Re}h} x\right) \quad (13)$$

где  $A_m = \frac{(a+1)\gamma_m^2 + \beta_1(a+2b+1)}{\gamma_m^4 + 2\beta_1\gamma_m^2 + \beta_1 + \beta_1^2}$ ,  $B = \frac{\beta_1(a+2b+1) - \lambda_1 \text{Re}(a+1)}{(\lambda_1 \text{Re})^2 - 2\beta_1\lambda_1 \text{Re} + \beta_1 + \beta_1^2}$

через  $\gamma_m$  обозначены действительные корни уравнения

$$\text{tg} \gamma = \gamma + \frac{a \text{Re}}{2\gamma}$$

$\lambda_1$  — значение, соответствующее двум действительным корням уравнения

$$\text{th} \sqrt{\lambda_1} \text{Re} = \sqrt{\lambda_1} \text{Re} + \frac{\lambda_1 \text{Re}}{2\sqrt{\lambda_1} \text{Re}}, \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{a \text{Re}}{2}$$

Подставляя в выражениях (8), (9) и (10)

$$\text{th} \beta = \beta - \frac{1}{3} \beta^3$$

и совершая все необходимые математические преобразования, получим приближенные значения оригиналов неких функций на достаточно большом удалении от входа

$$v_x = \frac{3U}{4} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \left[ (a+1) \text{ch} \sqrt{\lambda_1} x / h - \frac{\lambda_1(a+2b+1)}{2\lambda_1} \text{sh} \sqrt{\lambda_1} x / h \right] + \frac{U_1}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) \quad (14)$$

$$v_{10} = \frac{U_2}{2} \left( \frac{3y}{2h} - \frac{y^2}{2h^2} + 1 \right) \left[ \left( \frac{a+2b-1}{2} \right) \operatorname{ch} \gamma_1 x/h - \frac{3(a+1)}{2\lambda_1 \operatorname{Re}} \operatorname{sh} \gamma_1 x/h \right] \quad (15)$$

$$p_{10} = p_2 + \left( p_{11} - p_2 - \rho U_2^2 \frac{a+1}{2} \right) \operatorname{ch} \gamma_1 x/h - \frac{3\rho U_2}{2\lambda_1 h} (a+1) \operatorname{sh} \gamma_1 x/h \quad (16)$$

$$\text{Здесь } \gamma_1^2 = \frac{3\rho}{2\operatorname{Re}}$$

Найдем значение силы трения

$$\begin{aligned} \tau = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \left[ -\frac{U_2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_m \frac{\sin \gamma_m y/h}{\cos \gamma_m} \exp\left(-\frac{\gamma_m^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) + \right. \\ \left. + U_2 B \frac{\gamma_1 \operatorname{Re}}{h} \frac{3h \lambda_1 \gamma_1 \operatorname{Re} y/h}{\operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{Re}} \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \cos n y/h] \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) + \frac{U_2}{2h} - \frac{U_2}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_m \left( \frac{\sin \gamma_m y/h}{\gamma_m \cos \gamma_m} - \frac{y}{h} - \frac{\beta_1}{\gamma_m} \right) \exp\left(-\frac{\gamma_m^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) \right] \\ - \frac{U_2^2}{h} B \left[ \frac{\operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{Re} y/h}{\gamma_1 \operatorname{Re} \operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{Re}} - \frac{y}{h} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_1} \right] \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_2^2}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(-1)^n \times \\ \times \cos n y/h - 1] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) \quad (17) \end{aligned}$$

где  $\mu = \rho \nu$ .

Значения силы трения на стенках будут

$$\begin{aligned} \tau^h = -\frac{\mu U_2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_m^2 \left( 1 + \frac{\beta_1}{\gamma_m^2} + \frac{\lambda_1}{\operatorname{Re}} \right) \exp\left(-\frac{\gamma_m^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) + \\ + \frac{\mu U_2}{h} B \left( \lambda_1 + \operatorname{Re} - \frac{\beta_1}{\lambda_1} \right) \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{\mu U_2}{h} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) + \frac{1}{2} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^0 = \frac{\mu U_2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left( \gamma_m^2 + \beta_1 \right) \exp\left(-\frac{\gamma_m^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) - \frac{\mu U_2}{h} B \left( \operatorname{Re} - \frac{\beta_1}{\lambda_1} \right) \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \\ + \frac{\mu U_2}{h} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) + \frac{1}{2} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

Значение силы трения на достаточно большом удалении от входа, то есть для стабилизированного участка будет

$$\begin{aligned} \tau_x = \frac{\mu U_2}{h} \left[ \frac{\operatorname{Re} \lambda_1 (a+2b+1)}{2} \operatorname{sh} \gamma_1 x/h - \frac{3(a+1)}{2} \operatorname{ch} \gamma_1 x/h \right] \times \\ \times \left[ \frac{\lambda_1}{2\operatorname{Re}} \left( 1 - \frac{3y}{2h} - \frac{y^2}{2h^2} \right) + \frac{y}{h} \right] + \frac{\mu U_2}{2h} \quad (20) \end{aligned}$$

Соответственно

$$\tau_x^h = \frac{\mu U_2}{h} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\operatorname{Re}} \right) \left[ \frac{\operatorname{Re} \lambda_1 (a+2b+1)}{2} \operatorname{sh} \gamma_1 x/h - \frac{3(a+1)}{2} \operatorname{ch} \gamma_1 x/h \right] + \frac{\mu U_2}{2h} \quad (21)$$

$$\tau_{\text{н}} = -\frac{\mu U}{h} \left[ \frac{\text{Re} \epsilon_2 (a - 2b + 1)}{2} \text{sh} \epsilon_2 x / b - \frac{3(a + 1)}{2} \text{ch} \epsilon_2 x / h \right] + \frac{\mu U_1}{2h} \quad (22)$$

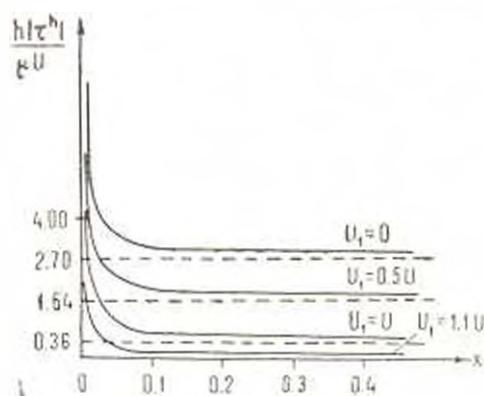
Приближенное значение длины начального участка (участок просачивания) определится из (16) при условии  $p_{\text{н}} = p_{\text{в}}$ ,  $x = l$  или из (15) при условии  $\tau_{\text{н}} = 0$ ,  $x = l$ .

$$\text{th} \frac{\epsilon_2 l}{b} = \frac{(\mu_{\text{н}} - \mu_{\text{в}} + 3U_1 \frac{a - 1}{2}) \epsilon_2 h}{3\mu_1 (a + 1)} \quad (23)$$

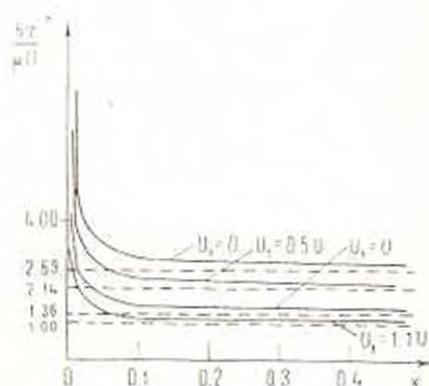
Уточненное значение длины участка просачивания получится из (13) или (12) при тех же условиях.

Как показывают полученные формулы, при  $\alpha = 0$ , то есть когда движущаяся стенка непроницаемая, результаты данной работы совпадают с результатами [2], при условии, что  $U_2 = 0$ .

Значения силы трения, возникающей от скоростей стенки и основного потока, показаны на фиг. 1 и 2, при построении которых приняты  $\alpha = 10^{-5}$ ,  $\text{Re} = 10$ . Как видно из фигур, когда верхняя пористая стенка неподвижна ( $U_1 = 0$ ), сила трения на этой стенке больше силы трения на нижней сплошной стенке. При увеличении скорости движения верх-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

ней пористой стенки сила трения уменьшается и при значении  $U_1 = 1.1U$  стремится к нулю на достаточно большом расстоянии от входа для стабилизированного участка трубы).

Фигуры показывают, что сила трения на подвижной пористой стенке меньше силы трения на неподвижной непроницаемой стенке.

Из фигур видно также, что силы трения как на проницаемой, так и на непроницаемой стенках уменьшаются при увеличении расстояния от входа трубы, то есть на обеих стенках сила трения для стабилизированного участка меньше, чем сила трения на начальном участке.

Сравнивая полученные формулы с результатами [2], видно, что при

движении пористой стенки, как на этой, так и на неподвижной сплошной стенках сила трения меньше, чем когда подвижная и неподвижная стенки непроницаемые, так, что пористость уменьшает динамическую силу трения на стенках.

## LIQUID FLOW IN THE CHANNEL WITH MOVING POROUS WALL

G. A. BABADJANYAN, R. ZIL MNATSAKANYAN

ՋԵՂՈՒԹԻ ԵՍԵՐՅԻՄԻՐ ԵՍԵՐՎՈՂ ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՓՈՏՈՎ շԱՐՔ ԿՈՂՎՈՎԱԿՈՒՄԻՐ

Գ. Ա. ԲԱԲԱԺՅԱՆԱՆ, Թ. Ժ. ՄՆԱՏՅԱԿԱՆՅԱՆ

### Ա մ փ ո փ ո ս մ

Իրաարկվում է ժամային անսեղանի ճեղքի սառցիանար, լասրնար, իզոթերմ շարժումը հարթ խողովակում, որի պատերից մեկը ծակոտակեն է և շարժական:

Իսկված են արագացան, ճնշման և շփման ուժի փոփոխման օրենքները սկզբնական և հաստատված հաստատներում:

Յույց է տրվում, որ ծակոտակենությունը փոքրացնում է զինամիկայան շփման ուժը խողովակի պատերի վրա:

Քերված է թվային օրինակ և կառուցված են պատերի վրա շփման ու գրաֆիկները՝ կախված խողովակի պատի և ճիմնական հոսքի արագություններից:

### ЛИТЕРАТУРА

1. Антышев И. А., Жубрин С. В., Мотулевич В. П. Анализ течения в канале с движущейся стенкой.—ИФЖ, 1985, т. 48, № 4, с. 592—597.
2. Бабаджанян Г. А., Мнацаканян Р. Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1987, т. 40, № 3, с. 49—53.
3. Садэкин Н. А. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками.—ПММ, 1957, т. 24, вып. 4, с. 591—593.
4. Бектурганов Е., Джаугантин К. Е., Сакинов З. Б., Ярин А. Л. Струнное обтекание движущейся поверхности.—Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1981, № 3, вып. 4, с. 33—41.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва: Изд-во «Высшая школа», 1967.

Երևանский государственный госуниверситет

Поступила в редакцию  
21.III.1987