

УДК 532.591.534.22.2

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА АСИМПТОТИЧЕСКУЮ КАРТИНУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СМЕСЯХ

ОГАНЯН Г. Г.

В реальных газожидкостных средах может иметь место интенсивный теплообмен между газовым пузырьком и окружающей его несущей жидкостью за счет их динамического взаимодействия. При этом количество тепла, отданное пузырьком в процессе сжатия, не обязательно равняется количеству тепла, полученному пузырьком от жидкости в процессе своего расширения. Тем самым, может иметь место диссипация кинетической энергии смеси за счет необратимого межфазного теплообмена. Важность учета тепловых эффектов, существенно влияющих на собственную частоту колебаний пузырька в жидкости, показана как в линейной [1], так и в нелинейной [2, 3] постановках. Известные физические и численные эксперименты по распространению слабых ударных волн [4—8] подтвердили главенствующую роль тепловой релаксации и общем механизме эффектов диссипации. В настоящей работе на основе модельных линейных уравнений Бюргерса-Кортвега-де Вриза исследованы задачи по распространению возмущений, начальные распределения которых задаются в виде разрывных и непрерывных функций (задачи Коши). Выявлено, что в полученных асимптотических представлениях решений далеко впереди волны эффекты диссипации противодействуют (ослабляют), а далеко позади фронта волны—способствуют (усиливают) процессу затухания возмущений.

§ 1. При адиабатическом и изотермическом предельных термодинамических поведении газового пузырька в жидкости тепловой поток от пузырька в жидкость и обратно отсутствуют [6, 7]. Для его учета в качестве исходной системы уравнений, описывающей течение двухфазной монодисперсной бесстолкновительной смеси с учетом несоответствия давлений и температур в фазах, эффектов вязкости жидкости и неоднородности газовых пузырьков, воспользуемся уравнениями [7]. Используя метод коротких волн [9], из исходной системы можно получить безразмерные нелинейные уравнения, описывающие распространение волн малой, но конечной амплитуды и учитывающие эффекты тепловой релаксации. Их подробный вывод приведен в [10], где различаются случаи термодинамического поведения пузырьков, близких:

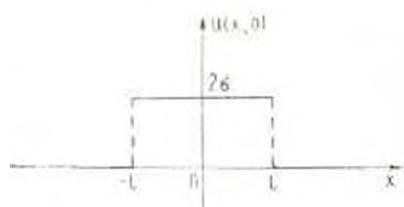
к изотермическому (квазиизотермический процесс)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \gamma_3 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} = 0 \quad (1.1)$$

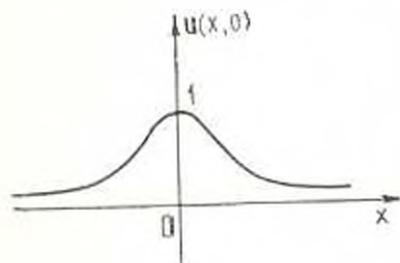
к адиабатическому (квазиадиабатический процесс)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \alpha_1 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \beta_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \gamma_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + \alpha u_1 = 0 \quad (1.2)$$

Здесь (x_1, t) — подвижная система координат, связанная с фронтом слабой ударной волны, распространяющимся либо с изотермической, либо с адиабатической скоростью звука в покоящейся смеси; u_1 — приведенное возмущение скорости частиц смеси; β_2 — коэффициенты, учитывающие диссипативные эффекты за счет вязкости, α — за счет тепловой релаксации (межфазного необратимого теплообмена); $\gamma_{1,2}$ — коэффициенты дисперсии, учитывающие также неоднородность газового пузырька в жидкости, $\alpha_1 = (\gamma_1 + 1)^2$ — коэффициент нелинейности, γ — показатель адиабаты газа. При $\beta_2 \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 0$ уравнения (1.1) и (1.2) будут описывать соответственно чисто изотермический и адиабатический режимы распространения возмущений [4, 6]. Напомним, что уравнения (1.1), (1.2) выписаны в безразмерной форме.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В линейной постановке, полагая в (1.2) $u_1 = v \exp(-\alpha t)$, получим уравнение относительно v , идентичное линейному варианту уравнения (1.1). Поэтому в качестве основного уравнения, подлежащего решению при различных начальных условиях, примем (1.1). Обозначим $\nu = \gamma_1 + \gamma_2$ и для простоты запишем индексы опустив

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Применяя к уравнению преобразование Фурье, нетрудно проверить, что его общее решение имеет вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(k, 0) \exp(-\nu k^2 t) \exp[i(\gamma t k^3 + xk)] dk \quad (1.3)$$

где $U(k, 0)$ — Фурье-образ начальной функции

$$U(k, 0) = \frac{1}{2\pi} \int u(x, 0) \exp(-ikx) dx$$

Пусть начальное условие задается в виде разрывной в точках $x = \pm l$ функции $u(x, 0) = \sigma [\operatorname{sgn}(x+l) - \operatorname{sgn}(x-l)]$. Тогда

$$U(k, 0) = \frac{2\sigma}{\pi} \frac{\sin kl}{k}, \quad \sigma = \text{const}$$

Подставляя его в решение (1.3) и рассматривая получаемый интеграл как свертку от функций Эйри и интегралов вероятности [11, 12], получим

$$u(x, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{z+l}{2\sqrt{\gamma t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{z-l}{2\sqrt{\gamma t}} \right) \right] Ai \left(\frac{x-z}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right) dz$$

Используя связь [13] между дельта-функцией Дирака и функцией Эйри, нетрудно показать, что при $\gamma t \rightarrow 0$ полученное решение переходит в заданное начальное условие.

Перейдем к изучению асимптотического поведения решения при больших значениях t . Разлагая функцию Эйри в степенной ряд по z , находим [12]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} Ai^{(2n)} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} z^{2n} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{z+l}{2\sqrt{\gamma t}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{z-l}{2\sqrt{\gamma t}} \right) \right] dz = \frac{4\sigma}{\pi} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} (t)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{t^2}{8\gamma t} \right) \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (2\gamma t)^n (3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} Ai^{(2n)} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right) \left[D_{-2n-2} \left(-\frac{l}{\sqrt{2\gamma t}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - D_{-2n-2} \left(\frac{l}{\sqrt{2\gamma t}} \right) \right] \end{aligned}$$

Здесь $D_{-2n-2}(s)$ — функции параболического цилиндра, сводимые посредством известных формул [11] к вырожденным гипергеометрическим (к функциям Куммера $\Phi(a, b, s^2/2)$). Поэтому решение можно выразить через функцию Куммера

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{4\sigma t}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} \exp \left(-\frac{t^2}{4\gamma t} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t)^n}{n!} (3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} Ai^{(2n)} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right) \times \\ &\quad \times \Phi \left(n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{4\gamma t} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решения при $t \gg \frac{t^2}{4\gamma t}$.

Согласно формуле асимптотического представления функции Куммера при малых значениях аргумента [11]

$$u(x, t) = \frac{4\pi l}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l)^n}{n!} (3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} A_l^{(2n)} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right)$$

Теперь получим асимптотические виды решения далеко впереди и позади фронта волны. При $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow \infty$, используя формулу асимптотического разложения для производных функций Эйри [13], имеем

$$u(x, t) = \frac{2\pi l}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\nu}{3\gamma} x \right] \quad (1.5)$$

Таким образом, далеко впереди волны на расстояниях $x = O(t^{1/3+\epsilon})$ где $\epsilon > 2/3$ затухание возмущений происходит одновременно как по степенному, так и по экспоненциальному законам, при этом учет диссипативных факторов противодействует этому процессу.

При $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow -\infty$ аналогичным образом находим

$$u(x, t) = \frac{4\pi l}{\sqrt{\pi}} \left| 3\gamma t x \right|^{-\frac{1}{3}} \exp \left(-\frac{\nu}{3\gamma} |x| \right) \cos \left(\frac{2}{3} \left| \frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (1.6)$$

то есть далеко позади волны ($x = O(t^{1/3+\epsilon})$, $\epsilon > 0$) затухание возмущений имеет осцилляционный характер, при этом диссипативные эффекты усиливают этот процесс. При переходе от одного газа к другому, отличающимся по величине коэффициентов температуропроводности на порядок (например, CO_2 и He), учет тепловой релаксации, характеризуемый коэффициентом β_T , начинает играть основную роль в механизме диссипации.

В случае пренебрежения всеми диссипативными эффектами удобнее всего обратиться к решению в виде (1.4). Используя асимптотическое представление функций Куммера при больших значениях аргумента, а также формулу Лежандра для удвоения аргументов гамма-функций [11], решение можно записать в виде

$$u(x, t) = \frac{4\pi l}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^{2n}}{\Gamma(2n+2)} (3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} A_l^{(2n)} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right) \quad (1.7)$$

Отсюда, аналогично выводу формул (1.5) и (1.6), нетрудно получить при $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow \infty$ (далеко впереди фронта волны)

$$u(x, t) = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right)^{-\frac{3}{4}} \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \text{sh} \left(l \sqrt[3]{\frac{x}{3\gamma t}} \right) \quad (1.8)$$

при $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow -\infty$ (далеко позади фронта волны)

$$u(x, t) = \frac{4\pi}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right|^{\frac{3}{4}} \cos \left[\frac{2}{3} \left| \frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right] \text{sh} \left(l \left| \frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right|^{\frac{1}{2}} \right) \quad (1.9)$$

Очевидно, что при $\nu = 0$ формулы (1.5) и (1.6) не переходят в (1.8) и (1.9). Такая неравномерность разложений объясняется тем, что

в решении (1.4) берутся различные предельные асимптотические представления функции Куммера. Именно поэтому в (1.5)–(1.8) законы затухания различны.

Если $t \rightarrow \infty$ и $x = o(t^{3/2+\epsilon})$, где $0 < \epsilon < \frac{2}{3}$, то в решении (1.7) можно ограничиться первым членом разложения

$$u(x, t) = \frac{4\gamma t}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} Ai\left(\frac{x}{\sqrt{3\gamma t}}\right) \quad (1.10)$$

При таких порядках величины расстояний далеко впереди и позади волны имеем $x(3\gamma t)^{-1} \rightarrow 0$, а $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow \infty$. Поэтому в решениях (1.8), (1.9) синус-функции можно заменить их аргументами и в формуле (1.10) использовать асимптотические представления функции Эйри. В результате предельных переходов придем к решениям (1.5) и (1.6), в которых $\nu = 0$.

При $\epsilon \geq \frac{2}{3}$, то есть на еще более отдаленных расстояниях от фронта волны, справедливы решения (1.8) и (1.9). Отметим, что применение метода стационарной фазы к вычислению интеграла (1.3), в котором $\nu = 0$, дает лишь решение (1.9)

Если же $t \rightarrow \infty$ и $x = o(t^{1/2})$, то в (1.7) необходимо использовать представление функции Эйри в виде [11, 14] рядов по возрастающим степеням аргумента. В этом случае затухание возмущений происходит одинаково по обе стороны фронта

$$u(x, t) = \frac{4\gamma t}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (\gamma t)^{-\frac{1}{3}}$$

§ 2. Для подтверждения качественных выводов и результатов п. 1, рассмотрим теперь начальные условия в виде непрерывных функций

$$a) \quad u(x, 0) = \exp(-m^2 x^2), \quad m = \text{const}$$

$$U(k, 0) = \frac{1}{2m\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4m^2}\right)$$

Общее решение (1.3) теперь запишется в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2m\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1+4m^2 t}{4m^2} k^2\right) \exp(i\gamma t k^3 + i x k) dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} (1+4m^2 t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 z^2}{1+4m^2 t}\right) Ai\left(\frac{x-z}{\sqrt{3\gamma t}}\right) dz \end{aligned}$$

Здесь при переходе от первого интеграла ко второму применена теорема о свертке Фурье-преобразов подынтегральных функций. Разлагая функцию Эйри в степенной ряд по переменной интегрирования и приводя интеграл к гамма-функции, после применения формулы Лежандра для Γ -функций, получим

$$u(x, t) = \frac{1}{m} (3\gamma t)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} \left(\frac{1+4m^2 t}{4m^2}\right)^n Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt{3\gamma t}}\right)$$

Для получения решений далеко впереди и позади фронта волны воспользуемся асимптотическими представлениями [13] производных функции Эйри. При $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow \infty$ находим, что далеко впереди волны

$$u(x, t) = \frac{1}{2m} (3\gamma t)^{-1/3} \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{3\gamma t}} \right)^{3/2} + \frac{1 + 4m^2 t}{4m^2} \frac{x}{3\gamma t} \right] \quad (2.1)$$

то есть учет диссипации приводит к ослаблению процесса монотонного затухания возмущений.

При $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow -\infty$ имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{m} |3\gamma t x|^{-1/3} \exp \left(-\frac{1 + 4m^2 t |x|}{4m^2} \frac{|x|}{3\gamma t} \right) \cos \left(\frac{2}{3} \left| \frac{x}{\sqrt{3\gamma t}} \right|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.2)$$

то есть далеко позади волны диссипация усиливает процесс осцилляционного затухания возмущений.

Очевидно, что с точностью до коэффициентов, законы затухания возмущений (2.1) (2.2) при $t \rightarrow \infty$ совпадают с (1.5), (1.6). При этом, как с учетом диссипации, так и без него, проведенный анализ о порядке величины расстояний, где справедливы полученные решения, сохраняет свою силу и в рассматриваемой задаче.

$$б) u(x, 0) = -\frac{2m^2}{\sqrt{\pi}} x \exp(-m^2 x^2), \quad m = \text{const}$$

$$U(k, 0) = i \frac{k}{2\pi} \Psi \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{k^2}{m^2} \right) = i \frac{k}{2\pi} \exp \left(-\frac{k^2}{4m^2} \right)$$

При вычислении Фурье-образа $U(k, 0)$ использовано преобразование Куммера для вырожденных гипергеометрических функций [11]. Общее решение (1.3) для рассматриваемого случая примет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \exp \left(-\frac{1 + 4m^2 t}{4m^2} k^2 \right) \exp(i\gamma t k^3 + i x k) dk = \\ &= -\frac{2m^2}{\pi} (1 + 4m^2 t)^{-3/2} (3\gamma t)^{-1/3} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp \left(-\frac{m^2 z^2}{1 + 4m^2 t} \right) Ai \left(\frac{x - z}{\sqrt{3\gamma t}} \right) dz \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь опять применена теорема о свертке. При $t \rightarrow 0$, согласно предельному переходу [13],

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-1/3} Ai \left(\frac{x - z}{\sqrt{3\gamma t}} \right) \rightarrow \delta(x - z)$$

где $\delta(x - z)$ — дельта-функция Дирака, нетрудно проверить выполнение начального условия. Разлагая в решении (2.3) функцию Эйри в ряд по степеням z и используя интегральное представление Γ -функ-

ний, после применения функциональных соотношений и формулы Лежандра [11] получим

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1 + 4m^2 t}{4m^2} \right)^n (3\gamma t)^{-\frac{2n}{3}} Ai^{(2n+1)} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right) \quad (2.4)$$

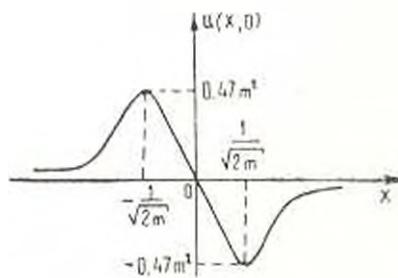
Выясним поведение решения на больших расстояниях от фронта волны впереди и позади него. Аналогично выводу формул (2.1) и (2.2) находим:

при $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow \infty$ (далеко впереди волны)

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 + 4m^2 t}{4m^2} \frac{x}{3\gamma t} \right] \quad (2.5)$$

при $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow -\infty$ (далеко позади волны)

$$u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{2}{3}} |x|^{\frac{1}{3}} \exp \left(-\frac{1 + 4m^2 t}{4m^2} \frac{|x|}{3\gamma t} \right) \cos \left(\frac{2}{3} \left| \frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.6)$$



Фиг. 3.

Таким образом, как и в выше рассмотренных задачах, впереди фронта волны эффекты диссипации ослабляют а позади фронта — усиливают процесс затухания возмущений. Если $t \rightarrow \infty$, то на расстояниях $x = O(t^{1/3+\epsilon})$ при $\epsilon > 0$ этот процесс описывается решением (2.6), а при $\epsilon > \frac{2}{3}$ — решением (2.5).

В недиссипативном варианте ($\nu = 0$) решения (2.1) при $t \rightarrow \infty$ и для расстояний $x = O(t^{1/3+\epsilon})$, где $0 < \epsilon < \frac{2}{3}$, можно ограничиться приближением

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (3\gamma t)^{-\frac{2}{3}} Ai' \left(\frac{x}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \right) \quad (2.7)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной. Действительно, именно на таких расстояниях $x(3\gamma t)^{-1/3} \rightarrow \pm \infty$, а $x(3\gamma t)^{-1} \rightarrow 0$, поэтому, используя асимптотические представления производной функции Эйри [13], нетрудно показать совпадение формул (2.7) и (2.5),

(2.6). При $\varepsilon > \frac{2}{3}$, то есть на более отдаленных расстояниях по обе стороны от фронта волны, справедливы только формулы (2.5) и (2.6).

Итак, анализ полученных результатов свидетельствует о том, что даже в отсутствие эффектов вязкости учет других диссипативных факторов весьма существенен при исследовании волновых задач в диспергирующих средах. Впередли линейной волны затухание возмущений происходит на более дальних расстояниях от фронта волны, чем позади него.

INFLUENCE OF DISSIPATION ON THE ASYMPTOTIC PICTURE OF LINEARY WAVES PROPAGATION IN GAS-FLUID MIXTURE

G. G. OHANIAN

ԳՈՒՐՊԱՆՑԻԱՅԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԳԱԶԱՆՆԵՂՈՒԻ ԽԼՈՒՆՈՒՐՊՆԵՐՈՒՄ
ԳՆԱՅԻՆ ԱՆԹԵՆՏԻ ՏՈՐԱՆՈՒՄԸ ԱՌՈՒՊՏՈՏԻՎ ՊԱՏՆԵՐԻ ՎՐԱ

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս ւ մ

Բնութագրուող ենք Գրիգի մոդելային դժային հավասարումների հիման վրա հետազոտված են գազանեղուկ խառնուրդում թույլ հարվածային ալիքների տարածման խնդիրները: Պոպուլյացիայի ճեղքայինամիկական վարչից կախված տարբերվում են զրգոտումների տարածման բվադիրգոթերիկ և կազիադիտրատիկ պրոցեսները: Ակզրնական պայմանները վերցված են խզվող և անրնդհատ ֆունկցիաների անարավ: Ուսացված են լուծումների ա սիմպատտիկ ներկայացումները ալիքի ճակատից բավականին առաջ և հետո հույց է արված, որ ալիքի ճակատից բավականին առաջ դիսիպացիայի է ֆեկաները թուլացնում, իսկ բավականին հետո՝ ուժեղացնում են զրգոտումների մարման պրոցեսը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Чанен Р. Б., Плессет М. С. Теплообмен эффекты при свободном колебании газовых пузырьков.—Теор. основы инж. расчетов, 1971, т. 93, № 3, с. 37—40
2. Нигматулин Р. И., Хабеев И. С. Теплообмен газового пузырька с жидкостью.—Изв. АН СССР, МЖТ, 1971, № 5, с. 94—100.
3. Ивченко В. М., Приходько Н. А., Сирин В. С. Численное решение задачи охлаждения пузырька горячего газа в жидкости.—Гидромеханика, Респ. межведомств. сб., 1971, вып. 19, с. 9—14.
4. Казначеев В. В., Накоряков В. Е., Покусаяев Б. Г., Шрейбер И. Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа.—В кн.: Нелинейные нелинейные процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
5. Губайдуллин А. А., Ивандеев А. И., Нигматулин Р. И. Исследование нестационар-

- ных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ИГФ, 1978, № 2, с. 78—86.
6. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Теплообмен и волны в газожидкостных смесях.—Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
 7. *Нисматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 316 с.
 8. *Нисматуллин Р. И., Ивандогаев А. И., Нисматуллин Б. И., Милошечко В. В.* Нестационарные волновые процессы в жидко- и парогазовых смесях. В кн. Нелинейные волновые процессы в звуковых средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 80—90.
 9. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химических жидкостных сред.—ИММ, 1971, т. 35, № 6, с. 1023—1037.
 10. *Оганян Г. Г.* Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред. Изв. АН АрмССР. Механика, 1988, т. 31, № 5, с. 25—31.
 11. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган.—М.: Наука, 1979. 810 с.
 12. *Прюдников А. П., Брычков И. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
 13. *Каримов В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М.: Наука, 1973. 176 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
в VI 1988