

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ
 ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАГРУЖЕННЫХ
 РАВНОМЕРНЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ. С УЧЕТОМ
 СДВИГОВЫХ МЕЖСЛОЙНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

ПОЧТМАН Ю. М., ШУЛЬГА С. А.

Известно [1], что в достаточно толстостенных оболочках межслойные сдвиговые напряжения могут превысить предел прочности еще в докритической стадии ее работы. Поэтому, создавая оптимальные проекты оболочек, целесообразно включать в число ограничений задачи ограничения на сдвиговые напряжения.

Классическая теория Кирхгофа-Лява, а также уточненная геометрически линейная теория типа Тимошенко (при данном виде нагружения) не позволяют определить сдвиговые межслойные напряжения. В связи с этим деформирование композитной цилиндрической оболочки будем исследовать на основе уточненной геометрически нелинейной теории типа Тимошенко.

Рассмотрим задачу оптимального проектирования шарнирно опертой композитной цилиндрической оболочки длиной l и радиуса R , находящейся под действием равномерного внешнего давления, при ограничениях на величину критической нагрузки и сдвиговые напряжения σ_{12} и σ_{23} :

$$\begin{aligned} V(h) &= L(\mu\gamma_s + (1-\mu)\gamma_c) \cdot h \cdot (2R-h) - \mu l n \\ q_{кр}(h, \beta_1, \dots, \beta_N, \varphi_1, \dots, \varphi_N) &\geq q, \quad q = \text{const} \\ \sigma_{23}(h, \beta_1, \dots, \beta_N, \varphi_1, \dots, \varphi_N) &\leq [\sigma_{23}] \\ \sigma_{12}(h, \beta_1, \dots, \beta_N, \varphi_1, \dots, \varphi_N) &\leq [\sigma_{12}] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь: $V(h)$ — вес оболочки; h — толщина; μ — объемный коэффициент армирования; γ_s и γ_c — средняя плотность армирующих волокон и связующего, соответственно; β_i, φ_i ($i = \overline{1, N}$) — углы армирования композита; h, β_i, φ_i ($i = \overline{1, N}$) — управляемые параметры задачи.

1. Для задачи оптимального проектирования (1.1) характерно отсутствие аналитической связи между целевой функцией $V(h)$ и управляемыми параметрами $\beta_1, \dots, \beta_N, \varphi_1, \dots, \varphi_N$. Данная постановка аналогична постановкам, рассматриваемым в [4,5], где для создания оптимальных проектов привлекались методы теории планирования экс-

гремальных экспериментов (ТПЭ). Здесь, с целью экономии машинного времени на расчет функций системы ограничений, предлагается усовершенствованная методика, по сравнению с предложенной в [4, 5]. Она может рассматриваться, как часть общего подхода к решению задач оптимального проектирования вида

$$F(\bar{Y}) \rightarrow \min, \quad \varphi_m(\bar{Y}^*) \leq a_m, \quad m = \overline{1, M} \quad (1.2)$$

где: $\bar{Y} = \{y_1, \dots, y_i\}$, $\bar{Y}^* = \{y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_j\}$ — векторы управляемых параметров; $F(\bar{Y})$ — целевая функция задачи; $\varphi_m(\bar{Y}^*)$ — система ограничений, включающая ограничения по прочности, устойчивости, на геометрические характеристики конструкции и другие. Для задачи (1.2) характерно отсутствие аналитической связи между целевой функцией $F(\bar{Y})$ и управляемыми параметрами y_1, \dots, y_i .

Суть предлагаемой методики состоит в следующем. Задача (1.2) методами ТПЭ предварительно сводится к задаче линейного программирования. Для этого в пространстве управляемых параметров вектора \bar{Y}^* выбирается начальная точка $y_1^0, y_2^0, \dots, y_i^0, y_{i+1}^0, \dots, y_j^0$. Задаются интервалы варьирования управляемых параметров и в определяемой интервалами варьирования малой окрестности начальной точки строится линейная модель системы ограничений задачи (1.2). Коэффициенты линейных моделей функций системы ограничений вычисляются по методу наименьших квадратов, как и в [4, 5].

Затем, в малой окрестности начальной точки $(y_{i+1}^0, \dots, y_j^0)$, определяемой выбранными интервалами варьирования для моделей функций системы ограничений, строится линейная модель целевой функции. Последовательность построения такая же, как и в [4, 5]. Вместе с тем, для вычисления коэффициентов модели целевой функции используется часть матрицы планирования для моделей функций системы ограничений, в которой столбец значений функций системы ограничений $\varphi_m(\bar{Y}^*)$ замещается столбцом значений функции F^* , определяемых из решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$F^* = F(\bar{Y}) \rightarrow \min, \quad \varphi_m(\bar{Y}) \leq a_m, \quad m = \overline{1, M} \\ y_n = \text{const}, \quad n = i + 1, j \quad (1.3)$$

Задача (1.3) может быть решена, например, одним из алгоритмов метода случайного поиска [6].

В результате этих преобразований задача (1.2) сводится к задаче линейного программирования

$$F(\bar{Y}^*) \rightarrow \min, \quad \varphi_m^*(\bar{Y}^*) \leq a_m, \quad m = \overline{1, M} \\ y_n - \Delta y_n \leq y_n \leq y_n^0 + \Delta y_n, \quad n = \overline{i + 1, j} \quad (1.4)$$

где Δy_n — интервалы варьирования управляемых параметров вектора

$\bar{Y}^{**} = \{y_{i+1}, \dots, y_j\}$. Решение задачи (1.4) (которое выполняется хорошо известными алгоритмами линейного программирования) дает возможность получить новые значения управляемых параметров y_{i+1}, \dots, y_j и затем решить задачу (1.3). Последовательность дальнейшего оптимизационного процесса аналогична методике, описанной в [4,5].

Если в итерационном процессе движения к оптимуму прекращается уменьшение целевой функции, то интервалы варьирования управляемых параметров уменьшаются, и весь процесс повторяется. Признаком окончания решения задачи служит достижение интервалами варьирования управляемых параметров заданной малой величины, обеспечивающей требуемую точность решения задачи.

2. В качестве исходных уравнений, позволяющих определить напряженно-деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, примем нелинейные уравнения [1].

В соответствии с процедурой метода Бубнова-Галеркина, исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных сводим к системе нелинейных алгебраических уравнений, которую решаем методом Ньютона, с использованием процедуры движения по параметру нагрузки [2].

В окрестности предельной точки параметр нагрузки \bar{q} меняется немонотонно, и процесс движения по этому параметру не может привести к положительному результату. Участки немонотонного изменения параметра нагрузки обходятся с помощью введения вспомогательного параметра [2], что обеспечивает выполнение условия разрешимости системы нелинейных уравнений в окрестности предельной точки. Значение параметра \bar{q} , при котором определитель матрицы Якоби метода Ньютона впервые обращается в нуль, принимаем за предельную нагрузку \bar{q}^* , а напряжения σ_{13} и σ_{23} находим в соответствии с [1].

Механические характеристики композита вычисляются на основе теории армирования [3]. Материал оболочки считается ортотропным, схема армирования принята гексагональной внутри каждого направления. Используются плоская и пространственная схемы армирования композита. В случае плоского армирования углы φ_{ij} , характеризующие пространственную структуру материала, принимаются равными нулю.

Матрица жесткости элементарного направления приводится к осям композита по формулам преобразования

$$[A_{ij}^k] = [T] \cdot [A_{ij}^0] \cdot [T]^*$$

где $[T]$ — матрица преобразования коэффициентов жесткости; $[T]^*$ — транспонированная матрица; $[A_{ij}^0]$ — матрица жесткости элементарного направления.

Для вычисления жесткостных характеристик пространственно-

армированного композита применяется метод осреднения жесткостей отдельных направлений [3]

$$A_{ij} = \frac{1}{\mu_2} \cdot \sum_{k=1}^N A_{ij}^k \mu_k$$

где $\mu_2 = \sum_{k=1}^N \mu_k$ — суммарный объемный коэффициент армирования;
 μ_k — коэффициент объемного армирования k -го направления.

Для случая плоского армирования имеем

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \theta_k \cdot A_{ij}^k$$

где θ_k — относительное число слоев, расположенных под углом β_k .

Полученные коэффициенты жесткости A_{ij} являются функциями геометрических параметров конструкций и параметров структуры материала. Аналитически представить эту зависимость не удастся ввиду сложности матричных преобразований при вычислении A_{ij} .

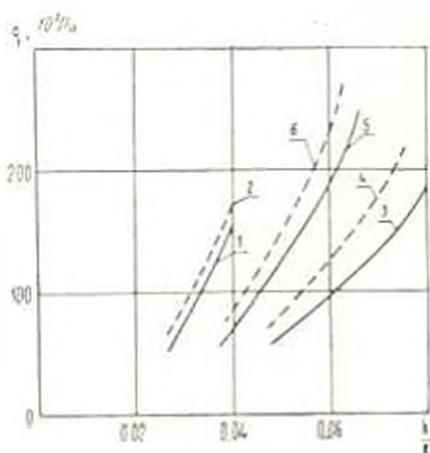
3. Рассмотрим применение описанного подхода к задаче оптимального проектирования (1.1), где относительное число слоев каждого вида в пакете θ_k принимается одинаковым и не варьируется. Пусть оболочка имеет следующие характеристики:

$$\gamma_a = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Па/м}; \quad \gamma_c = 1,2 \cdot 10^4 \text{ Па/м}; \quad E_a = 0,75 \cdot 10^{11} \text{ Па};$$

$$E_c = 0,35 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \nu_a = 0,21; \quad \nu_c = 0,33; \quad \mu = 0,5;$$

$$R/L = 0,5; \quad i = 3; \quad [z_{11}] = [z_{22}] = 160 \cdot 10^3 \text{ Па}; \quad w^0 = 0,1h;$$

$$q = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

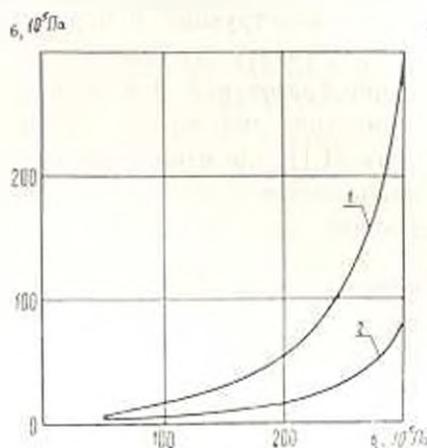


Фиг. 1. Зависимость предельной нагрузки от параметра тонкости оболочки.

По графикам, представленным на фиг. 1, можно оценить погрешность определения критической нагрузки в геометрически линейной

задаче устойчивости. Кривые 2, 4, 6 соответствуют геометрически линейной модели оболочки, а кривые 1, 3, 5 — нелинейной модели (кривые 1, 2 построены для параметра $\rho_1 = \frac{R}{L} = 2$; 3, 4 — $\rho_2 = 0,5$; 5, 6 — $\rho_1 =$

$= 1$). Здесь: $\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$; $\varphi_1 = 0, 0, 0$; $\bar{\omega}^0 = 0,1$. Видно, что для оболочки с $\rho_1 = 0,5$ и $\rho_2 = \frac{h}{R} = 0,06$, погрешность при вычислении критической нагрузки по линейной теории составляет 27%, а для оболочки с $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 0,06$ — 24%. Ввиду большой погрешности в определении критической нагрузки по линейной теории, можно сделать вывод о необходимости нелинейной постановки в задачах оптимального проектирования конструкций такого класса.



Фиг. 2 Зависимость напряжений σ_{13} и σ_{23} от нагрузки q .

На фиг. 2 представлены графики зависимости межслойных сдвиговых напряжений σ_{13} и σ_{23} от нагрузки q в докритической стадии работы оболочки (кривая 1 соответствует напряжению σ_{23} , кривая 2 — σ_{13}). Кривые построены для оболочки с параметрами $\rho_1 = 0,5$; $\rho_2 = 0,1$; $\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$; $\varphi_1 = 0, 0, 0$; $\bar{\omega}^0 = 0,1$, при этом предельная нагрузка $q^* = 309,8 \cdot 10^8$ Па. Видно, что при нагрузке $q \geq 275 \cdot 10^8$ Па напряжения превысят допустимые $[\sigma] = 160 \cdot 10^8$ Па и оболочка разрушится вследствие расслоения, находясь еще в докритической стадии работы.

Результаты численной реализации на ЭВМ оптимизационной задачи (1.1) для оболочек с плоской и пространственной схемами армирования приведены в табл. 1. Сравним результаты табл. 1 с результатами реализации таких же задач в геометрически линейной постановке (табл. 2).

Таблица 1

Оптимальные проекты композитных оболочек (нелинейная задача)

№№ ПП	$\frac{R}{L}$	Характеристики оптимального проекта					
		$\varphi_1 = 0$					
		β_1	β_2	β_3	$h \cdot 10^{-2} \text{ м}$	V	n
1	$\frac{50}{25} = 2$	1.001	1.047	0.748	1.291	185.09	8
2	$\frac{30}{30} = 1$	1.195	1.281	1.305	1.079	110.78	5
3	$\frac{25}{50} = 0.5$	1.511	1.353	1.067	1.137	161.43	3
		$\varphi_1 = 0.785$					
1	$\frac{50}{25} = 2$	0.816	0.876	1.014	1.280	183.60	8
2	$\frac{30}{30} = 1$	1.170	1.143	1.432	1.076	110.54	5
3	$\frac{25}{50} = 0.5$	1.560	1.415	1.030	1.135	161.11	3

Таблица 2

Оптимальные проекты композитных оболочек (линейная задача)

№№ ПП	$\frac{R}{L}$	Характеристика оптимального проекта				
		$\varphi_1 = 0$				
		β_1	β_2	β_3	$h \cdot 10^{-2} \text{ м}$	$V \text{ л}$
1	$\frac{50}{25} = 2$	1.145	1.066	1.061	1.189	170.68
2	$\frac{30}{30} = 1$	1.317	1.317	1.308	0.957	98.5
3	$\frac{25}{50} = 0.5$	1.476	1.477	1.534	1.039	147.78
		$\varphi_1 = 0.785$				
1	$\frac{50}{25} = 2$	1.132	1.077	1.050	1.183	169.74
2	$\frac{30}{30} = 1$	1.314	1.314	1.304	0.956	98.32
3	$\frac{25}{50} = 0.5$	1.432	1.435	1.465	1.039	147.72

Оптимальные углы β_i ($i=1,3$) получились практически равными (разброс составил $1^\circ \div 2^\circ$) — для геометрически линейной постановки. В оптимальных проектах оболочки, полученных на основе геометрически нелинейной теории, наблюдается значительный разброс в углах β_i ($i=1,3$), достигающий в некоторых случаях 30°. Сравнимая получен-

вые значения целевых функций, видим что оболочки, рассчитанные по нелинейной теории, соответственно на 8,4 %, 12,4 % и 9,2 % тяжелее таких же оболочек, спроектированных на основе линейной теории. Использование пространственной схемы армирования материала дает при этом незначительный выигрыш в весе (от 0,2 % до 0,8 %). Как и ожидалось, наибольший выигрыш в весе достигается для более толстых оболочек.

Для большинства оптимальных проектов наблюдаются следующие закономерности в распределении углов армирования β_i ($i = 1, 3$):

1) В линейной модели оболочки углы β_i ($i = 1, 3$) получились практически равными.

2) В нелинейной модели ($r_1 = 1$; 2) два угла армирования оказались близкими, то есть, как и в работе [7], при оптимальном проектировании по нелинейной модели оболочки достаточно варьировать двумя углами β_i ($i = 1, 2$).

3) Для оболочки с параметром $\rho_1 = 0,5$ все три оптимальных значения углов β_i ($i = 1, 3$) получены различными.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод, что оптимальное проектирование оболочек из композитных материалов целесообразно проводить на основе методики, построенной на методах теории планирования экстремальных экспериментов, а напряженно-деформированное состояние оболочек при создании оптимизационных моделей следует определять на основе уточненной геометрически нелинейной теории, учитывающей явление межслойного сдвига.

OPTIMAL DESIGN OF COMPOSED CYLINDRICAL SHELL, LOADED BY EXTERNAL UNIFORMLY PRESSURE, TAKING INTO ACCOUNT SHEAR UNDERLAYER STRESSES

YU. M. POCHTMAN, S. A. SCHULGA

ԱՐՏԱՔԻՆ ԶԱՎԱԾՐԱԶԱԹ ՀԱՇՈՎՄԱՆ ԲԵՒՆԴԱՐՎԱԾ ԿՈՄՊՈզԻՅԻՆ
 ԿԱՆԱԿՆԻ ԹԱՎԱՆՔՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԿԱՎՈՐՄԱՆ ԿԵՂՇՆԵՐՏԱՅԻՆ
 ՍԱՀՔԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԶԱՇՎԱԾՈՒՄՈՎ
 ՅՈՒ. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ, Ս. Տ. ՇՈՒԿԱ

Ա մ փ ո փ ո ս լ

Կառուցվածքների օպտիմալ նախագծման մեխոլոկան սպասարժված է կամպոզիցիոն դանսյին թաղանթների օպտիմալ (բառ բաշխ) բնարտիվյան լուղիի լուծման համար, երբ թաղանթները բնագործված են արտարին ճրճ-մամբ: Բերված է օպտիմալ նախագծերի համեմատություններ, որոնք ստաց-

ված են Տիմոչենկոյի արդի երկրաչափորեն զծային և ոչ զծային տեսության հիման վրա:

Յույժ է արված երկրաչափորեն ոչ զծային տեսության օգտագործման նախընտրելիությանը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Рикарде Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов.— Рига: Знание, 1974. 310 с.
2. Залишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.— М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
3. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопроотивление вадимерных и композитных материалов.— Рига: Знание, 1980. 572 с.
4. Почман Ю. М., Шульга С. А. Применение теории планирования экстремальных экспериментов к оптимальному проектированию композитных оболочек.— В кн. Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепрпетровск: ДГУ, 1982, с. 140—145.—(Сб. научных трудов, вып. 29).
5. Косиченко А. А., Почман Ю. М., Шульга С. А. Применение теории планирования экстремальных экспериментов к параметрическому синтезу композитных оболочек минимального веса.— В кн.: III Конференция молодых ученых и специалистов по механике композитных материалов: Тез. докл. Рига: Знание, 1981, с. 106—108.
6. Гурич И. Б., Захарченко В. Г., Почман Ю. М. Рандомизированный алгоритм для решения задач нелинейного программирования.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1979, № 5, с. 30—33.
7. Нарусберг В. Л. К постановке задачи оптимизации макрооднородных слоистых оболочек, работающих на устойчивость.— Механика композитных материалов, 1983, № 4, с. 648—656.

Днепрпетровский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
10.XI.1983