ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 3, 1989 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ, СОЕДИНЕННЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ГРИГОРЯН Э. Х., ОВАКИМЯН А. С.

В работе рассматривается задача для двух упругих полуплоскостей с начальными напряжениями, соединенных между собой полубесконечным включением. Задача с помощью преобразования Фурье сводится к решению разностного уравнения относительно трансформанты Фурье тангенциальных контактных напряжений. Далее строится замкнутое решение разностного уравнения и определяются асимптотические формулы для контактных напряжений в окрестности конца и далеких от конца точках включения.

Пусть две полуплоскости с начальными напряжениями соединены между собой упругим полубесконечным включением. Полуплоскости деформируются под действием силы, приложенной на конце включения. Требуется определить контактные напряжения, действующие в точках соединения включения с полуплоскостями. При отсутствии начальных напряжений рассматриваемая задача была рассмотрена в [1—2].

На основании [3] задача в случае неравных корней сводится к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

$$\int_0^\infty \frac{\tau(t)dt}{t-y_1} + \alpha_1 \int_0^\infty \frac{p(t)dt}{t-y_1} + \alpha_2 p(y_1) + \alpha_3 \tau(y_1) = -\chi \int_{y_1}^\infty \tau(t)dt$$

$$(0<y_1<\infty) \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{p(t)dt}{t-y_1} + \alpha_4 \int_0^\infty \frac{\tau(t)dt}{t-y_1} + \alpha_5 p(y_1) + \alpha_6 \tau(y_1) = 0$$

а в случае равных корней—к решению системы

$$\int_0^\infty \frac{\tau(t)dt}{t-y_1} + \alpha_2 p(y_1) = -\chi \int_{y_1}^\infty \tau(t)dt$$

$$(0<y_1<\infty) \qquad (2)$$

$$\int_0^\infty \frac{p(t)dt}{t-y_1} + \alpha_6 \tau(y_1) = 0$$

где $\tau(y_1)$—интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $p(y_1)$—интенсивность контактных нормальных напряжений. В (1), (2) значения параметров α_k, χ приведены в [3].

В [3] дается решение задачи для двух полуплоскостей с начальными напряжениями, соединенных между собой конечным включением. При этом следует отметить, что исследование системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений второго рода вышеуказанного вида, определенной на конечном интервале, приведено в [4].

Рассмотрим случай неравных корней. Проведя в (1) замену переменных $t = e^u$, $y_1 = e^v$, а затем преобразования Фурье, относительно трансформант Фурье контактных напряжений $\tau_1(u) = \tau(e^u)$, $p_1(u) = p(e^u)$ получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_3 - i\pi\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha)\overline{\tau_1}(\alpha) + (\alpha_2 - \alpha_1 i\pi\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha)\overline{p_1}(\alpha) = -\chi\frac{\overline{\tau_1}(\alpha - i)}{i\alpha}\\
&(\alpha_6 - \alpha_4 i\pi\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha)\overline{\tau_1}(\alpha) + (\alpha_5 - i\pi\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha)\overline{p_1}(\alpha) = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где

$$
\overline{\tau_1}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\tau_1(u)\exp(i\alpha u)du, \quad \overline{p_1}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}p_1(u)\exp(i\alpha u)du
$$

Решив систему уравнений (3), получим

$$
i\alpha K(\alpha)\overline{\tau_1}(\alpha) + \chi\overline{\tau_1}(\alpha - i) = 0, \quad -1 < \mathrm{Im}\,\alpha < \delta, \tag{4}
$$

$$
\overline{\tau_1}(-i) = \frac{P}{2} \tag{5}
$$

$$
\overline{p_1}(\alpha) = \chi\frac{(\alpha_6 - \alpha_4 i\pi\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha)\overline{\tau_1}(\alpha - i)}{a - ib\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha - c\,\mathrm{cth}^2\pi\alpha}
$$

где $a = \alpha_3\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6$, $b = \pi(\alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_6)$, $c = \pi^2(1 - \alpha_1\alpha_4)$

$$
K(\alpha) = \frac{a - ib\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha - c\,\mathrm{cth}^2\pi\alpha}{\alpha_5 - i\pi\,\mathrm{cth}\,\pi\alpha}
$$

δ—мнимая часть нуля функции $K(\alpha)$, находящаяся в интервале $-1 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0$ и имеющая наименьшую мнимую часть.

Таким образом, задача свелась к решению разностного уравнения (4) при условии (5) (условие равновесия включения).

Для решения разностного уравнения заметим, что

$$
\lim_{\alpha\to\infty}K(\alpha) = |z|\exp\left(i\,\mathrm{arctg}\,\frac{B}{A}\right), \quad \lim_{\alpha\to-\infty}K(\alpha) = |z|\exp\left(-i\,\mathrm{arctg}\,\frac{B}{A}\right)
$$

где

$$
A = (a - c)\alpha_5 + \pi b, \quad B = \pi(a - c) - b\alpha_5, \quad |z| = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\pi^2 + \alpha_5^2}
$$

Далее решение уравнения (4) ищем в виде

$$\bar{\tau}_1(\alpha) = (i\alpha - 1)^s |z|^{i\alpha - 1} \chi^{1 - i\alpha}\, \Gamma(i\alpha) Y(\alpha) \exp(\pi\alpha(1-s))$$

$$\bar{\tau}_1(\alpha - i) = (i\alpha)^s |z|^{i\alpha} \chi^{-i\alpha}\, \Gamma(1 + i\alpha) Y(\alpha - i) \exp(\pi(\alpha - s\alpha + si))$$

где $s = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{B}{A}$, $\Gamma(u)$ — гамма-функция. Тогда, подставляя выражения $\bar{\tau}_1(\alpha)$, $\bar{\tau}_1(\alpha - i)$ в (4) и имея в виду условие (5), для определения $Y(\alpha)$ получим следующее разностное уравнение:

$$R(\alpha) Y(\alpha) = Y(\alpha - i), \quad -1 < \operatorname{Im}\alpha < \delta \tag{6}$$

при условии

$$\lim_{\alpha \to -i} (i\alpha - 1)^s Y(\alpha) = \frac{P}{2} e^{-i\pi s} \tag{7}$$

Здесь $R(\alpha) \to 1$ при $\alpha \to \pm\infty$ в полосе $-1 < \operatorname{Im}\alpha < \delta$ и имеет вид

$$R(\alpha) = |z|^{-1} \left(\frac{i\alpha - 1}{i\alpha} \right)^s K(\alpha) \exp(-i\pi s)$$

Решение (6) построим с помощью метода интегральных преобразований, изложенного в [5, 6]. Для этого уравнения (6) сведем к эквивалентному ему уравнению

$$\bar{x}(\alpha - i) - \bar{x}(\alpha) = \bar{l}(\alpha) \tag{8}$$

где

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \ln Y(\alpha), \quad \bar{l}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \ln R(\alpha)$$

Теперь применив к (8) обратное преобразование Фурье, получим

$$(e^u - 1) x(u) = l(u) + is \tag{9}$$

где

$$x(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau - \infty}^{i\tau + \infty} \bar{x}(\alpha) \exp(-i\alpha u) d\alpha, \quad l(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau - \infty}^{i\tau + \infty} \bar{l}(\alpha) \exp(-i\alpha u) d\alpha, \quad -1 < \tau < \delta$$

Здесь имелось в виду, что $\bar{x}(\alpha)$ в точке $\alpha = -i$ имеет простой полюс. Из (9) $x(u)$ определится в виде

$$x(u) = \frac{l(u)}{e^u - 1} + \frac{is}{e^u - 1} + M\delta(u) \tag{10}$$

где $\delta(u)$ — функция Дирака.

Наконец, применив к (10) преобразование Фурье, определим $\bar{x}(\alpha)$ в следующем виде:

$$\bar{x}(\alpha) = \bar{\varphi}(\alpha) - \pi s \operatorname{cth} \pi\alpha + M \tag{11}$$

где

$$\bar{\varphi}(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{l(u)}{e^{u}-1}\exp(i\alpha u)\,du$$

Тогда

$$\ln|(i\alpha-1)^{s}Y(\alpha)|=\int\limits_{-i}^{\alpha}\varphi(\xi)d\xi+\ln\left|\frac{\pi(\alpha+i)\cos\pi}{\operatorname{sh}\pi\alpha}\right|^{s}+M(\alpha+i)+N$$

Отсюда

$$(i\alpha-1)^{s}Y(\alpha)=\left|\frac{\pi(\alpha+i)\cos\pi}{\operatorname{sh}\pi\alpha}\right|^{s}\exp\left|\int\limits_{-i}^{\alpha}\varphi(\xi)d\xi+M(\alpha+i)+N\right|$$

Постоянная N определяется из условия (7)' и равна $\ln P/2$, а $Y(\alpha)$ удовлетворяет уравнению (7) при $M=-\pi s$.

Итак, мы определили решение искомой задачи в виде

$$\bar{\tau}_1(\alpha)=-\frac{P}{2}\exp(\pi(\alpha-2s\alpha-si))\left(\frac{|z|}{\chi}\right)^{i\alpha-1}\Gamma(i\alpha)\left|\frac{\pi(\alpha+i)}{\operatorname{sh}\pi\alpha}\right|^{s}\exp\left\{\int\limits_{-i}^{\alpha}\varphi(\xi)d\xi\right\}$$

Теперь приступим к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (2) (случай равных корней). Поступая аналогично тому, что было сделано выше для трансформантов Фурье контактных напряжений, получим следующее:

$$\alpha K(\alpha)\bar{\tau}_1(\alpha)+\chi\bar{\tau}_1(\alpha-i)=0,\quad -1<\operatorname{Im}\alpha<\delta \tag{12}$$

$$\bar{\tau}_1(-i)=\frac{P}{2} \tag{12'}$$

$$\bar{p}_1(\alpha)=-\chi\frac{a_6\bar{\tau}_1(\alpha-i)}{a_2a_6+\pi^2\operatorname{cth}^2\pi\alpha}$$

где

$$K(\alpha)=\frac{a_2a_6+\pi^2\operatorname{cth}^2\pi\alpha}{\pi\operatorname{cth}\pi\alpha}$$

Решение разностного уравнения представим в виде [5]

$$\bar{\tau}_1(\alpha)=\frac{\Gamma(i\alpha)}{i\operatorname{sh}\dfrac{\pi\alpha}{2}}\left(\frac{\pi^2+a_2a_6}{\pi\chi}\right)^{i\alpha-1}Y(\alpha) \tag{13}$$

Подставляя выражение $\bar{\tau}_1(\alpha)$ в (12), для определения $Y(\alpha)$ получим разностное уравнение

$$R(\alpha)Y(\alpha)=Y(\alpha-i),\quad -1<\operatorname{Im}\alpha<\delta \tag{14}$$

при условии

$$Y(-i)=\frac{P}{2} \tag{14'}$$

где

$$R(\alpha)=\frac{1}{2(\pi^2+\alpha_2\alpha_6)}\,\frac{\pi^2\mathrm{ch}^2\pi\alpha+\alpha_2\alpha_6\mathrm{sh}^2\pi\alpha}{\mathrm{ch}\pi\alpha\,\mathrm{sh}^2\frac{\pi\alpha}{2}}$$

$R(\alpha)\to 1$ при $\alpha\to\pm\infty$ в полосе $-1<\mathrm{Im}\alpha<1$

Далее с помощью метода интегральных преобразований, получим решение задачи (14), (14)' в виде

$$Y(\alpha)=\frac{P}{2}\exp\left\{\int\limits_{-i}^{\alpha}x(\zeta)d\zeta\right\} \tag{15}$$

где

$$x(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{l(u)}{e^u-1}\exp(i\alpha u)du,\qquad l(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i-\infty}^{i+\infty}\frac{d}{d\alpha}\{\ln R(\alpha)\}\exp(-i\alpha u)d\alpha$$

Решение аналогичного вида (15) было получено в работе [1].

Чтобы узнать аналитические свойства $\tau_1(\alpha)$ и тем самым определить $\tau(y_1)$ в более наглядном виде, следует вычислить интеграл при экспоненте (15). Для это заметим, что $R(\alpha)$ можно записать в виде

$$R(\alpha)=\frac{2}{\alpha^2(\pi^2+\alpha_2\alpha_6)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1+\frac{\alpha^2}{\left(k-\frac{1}{2}+i\frac{\beta}{\pi}\right)^2}\right]\left[1+\frac{\alpha^2}{\left(i\frac{\beta}{\pi}-k+\frac{1}{2}\right)^2}\right]}{\left[1+\frac{\alpha^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\right]\left[1+\frac{\alpha^2}{4k^2}\right]} \tag{16}$$

так как

$$\pi^2\mathrm{ch}^2\pi\alpha+\alpha_2\alpha_6\mathrm{sh}^2\pi\alpha=(\pi^2+\alpha_2\alpha_6)\mathrm{ch}(\pi\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\pi\alpha-\beta)$$

где

$$\mathrm{ch}\beta=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\alpha_2\alpha_6}},\quad \mathrm{sh}\beta=-i\sqrt{\frac{\alpha_2\alpha_6}{\pi^2+\alpha_2\alpha_6}}$$

Далее, использовав (16), с помощью теории вычетов вычисляется интеграл

$$\int\limits_{-i}^{\alpha}x(\zeta)d\zeta$$

и определяется $Y(\alpha)$ в виде бесконечного произведения

$$Y(\alpha)=P\cdot 2^{1-i\alpha}\pi(\pi^2+\alpha_2\alpha_6)^{-i\alpha}\Phi(\alpha)\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\alpha+i\frac{\beta}{\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+i\alpha-i\frac{\beta}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\alpha-i\frac{\beta}{\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-i\alpha+i\frac{\beta}{\pi}\right)}{\Gamma^2(i\alpha)\Gamma^2(i\alpha+2)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\alpha\right)\Gamma\left(i\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma^{-2}(3-i\alpha)} \tag{17}$$

$$\Phi(\alpha)=\prod_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma^2(2k+1-i\alpha)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-i\alpha\right)\Gamma\left(k+i\alpha-\frac{1}{2}+i\frac{\beta}{\pi}\right)\Gamma\left(k+i\alpha-\frac{1}{2}-i\frac{\beta}{\pi}\right)}{\Gamma^2(2k+i\alpha)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+i\alpha\right)\Gamma\left(k-i\alpha+\frac{1}{2}+i\frac{\beta}{\pi}\right)\Gamma\left(k-i\alpha+\frac{1}{2}-i\frac{\beta}{\pi}\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{4k^2\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\beta^2}{\pi^2}}\right]^{2i\alpha-1}$$

Из (13) и (17) нетрудно видеть, что полюсами функции $\bar{\tau}_1(\alpha)$ при $\operatorname{Im}\alpha>-1$ являются точки $\alpha_n^{(1)}=i\left(n-\frac{1}{2}-i\frac{\beta}{\pi}\right)$, $\alpha_n^{(2)}=i\left(n-\frac{1}{2}+i\frac{\beta}{\pi}\right)$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$ ($n+1$-кратные), а при $\operatorname{Im}\alpha<-1$ — точки $\alpha_n^{(3)}=-in$, $\alpha_n^{(4)}=-i\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $(n=2, 3, 4, \ldots)$ ($n-1$-кратные).

Тогда применив обратное преобразование Фурье к $\bar{\tau}_1(\alpha)$ и переходя к прежним переменным, с помощью теории вычетов получим представление искомой $\tau(y_1)$

$$\tau(y_1)=$$

$$=\frac{P}{2}\sqrt{\frac{\chi}{\pi(\pi^2+\alpha_2\alpha_6)}}\cdot\operatorname{Re}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\beta}{\pi}\right)\left(\frac{\pi^2+\alpha_2\alpha_6}{\pi\chi y_1}\right)^{i\frac{\beta}{\pi}}}{\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{2}-i\frac{\pi}{4}\right)}Y\left(\frac{\beta}{\pi}-\frac{3}{2}i\right)\right]\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{y_1}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\alpha^n}\left\{\bar{\tau}_1(\alpha)y_1^{-i\alpha}(\alpha-\alpha_n^{(1)})^{n+1}\right\}\Bigg|_{\alpha=\alpha_n^{(1)}}+\frac{d^n}{d\alpha^n}\left\{\bar{\tau}_1(\alpha)y_1^{-i\alpha}(\alpha-\alpha_n^{(2)})^{n+1}\right\}\Bigg|_{\alpha=\alpha_n^{(2)}}\right] \tag{18}$$

Из (18) следует, что $\tau(y_1)$ при $y_1\to 0$ имеет корневую особенность с осцилирующим множителем.

Для получения асимптотической формулы для $\tau(y_1)$ при $y_1\to\infty$ замыкаем линию интегрирования снизу. Вычислив интеграл с помощью теории вычетов при $y_1\to\infty$, получим

$$\tau(y_1)=P\chi\left[(\chi y_1)^{-2}+(\chi y_1)^{-3}\left(2C+2\ln\frac{\pi}{\pi^2+\alpha_2\alpha_6}-1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\frac{4\beta}{\pi}\sqrt{\alpha_2\alpha_6}+2\ln(\chi y_1)\right)+\frac{3\alpha_2\alpha_6}{\pi(\chi y_1)^{5/2}}+0\left\{y_1^{-7/2}(1+\ln y_1)\right\}\right]$$

$$C=0{,}5772\ldots.$$

Отметим, что можно было бы получить также формулы, аналогичные (17), (18) для $p(y_1)$.

CONTACT PROBLEM FOR TWO HALF-PLANES WITH INITIAL STRESSES, UNITED BY AN HALF-INFINITE INCLUSION

E. Kh. GRIGORIAN, A. S. OVAKIMIAN

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՆԵՐԴԻՐՈՎ ՄԻԱՑՎԱԾ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐՈՎ ԵՐԿՈՒ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ս. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է սկզբնական լարումներով երկու առաձգական կիսահարթությունների կիսաանվերջ ներդիրով միացման խնդիրը։ Ֆուրիեի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը բերված է կոնտակտային շոշափող լարումների Ֆուրիեի տրանսֆորմանտի նկատմամբ տարբերակային հավասարման լուծմանը։ Կառուցված է տարբերակային հավասարման փակ լուծումը և ներդիրի ծայրակետի շրջակայքում ու նրանից հեռու կետերում կոնտակտային լարումների համար ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* К контактной задаче о двух полубесконечных пластинах, соединенных полубесконечной упругой накладкой.—В кн: Механика деформируемых тел и конструкций, посвященном 60-летию академика Ю. Н. Работнова. М.: Машиностроение, 1975, с. 44—51.
2. *Нуллер Б. М.* Деформация упругого клина, подкрепленного балкой.—ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
3. *Гузь А. Н., Рудницкий В. Б.* Контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками.—ПМ, 1985, т. 21, № 3.
4. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983.
5. *Koiter W.* On the Diffusion of Load From a Stiffener into a sheet.—Quarterly Iournal of Mechanics and Applied Mathematics, 1955, v. 8, № 2.
6. *Григорян Э. Х.* Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости. Уч. зап. ЕГУ, 1981, № 3.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
27.I.1988